

درسنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون ریاضے

نظام جدید

کاظم اجاللی، ارشک حمیدی



رشته
تجربی

انتگرالگو

به ضمیمه کنکور سراسری ۹۸

پیش‌گفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواریش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دوره متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایه پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، کتاب سه‌بعدی شامل درسنامه مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کتاب تست شامل درسنامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. معلوم است که تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای کتاب‌های تست، نسبت به کتاب‌های سه‌بعدی بسیار بیشتر است.

کتاب‌های موج‌آزمون ویژه آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضی ۱ سال دهم، ریاضی ۲ سال یازدهم و ریاضی ۳ سال دوازدهم است. در این کتاب همه مباحث این درس‌ها را در ۱۵ فصل تنظیم کرده‌ایم.

در ابتدای هر فصل، همه مطالبی را که برای حل کردن پرسش‌های آن فصل باید بدانید آورده‌ایم. پس از آن، نوبت آزمون‌هاست. در هر آزمون، بیست پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث، بیش از یکی باشد. در انتهای هر فصل، به جز فصل‌های (۱) و (۵)، یک یا چند آزمون جامع مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. در فصل (۱۶) هم پنج آزمون جامع از همه مباحث آورده‌ایم که هر کدام سی پرسش دارد. چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی و مهدیه جمشیدی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حرفه‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس و خانم شیرین دانشی‌پور برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: بازه و مجموعه

- درسنامه ۲
آزمون ۱: بازه و مجموعه (۱) ۴
آزمون ۲: بازه و مجموعه (۲) ۵

● فصل دوم: الگو و دنباله

- درسنامه ۸
آزمون ۳: الگو و دنباله ۱۰
آزمون ۴: دنباله حسابی ۱۱
آزمون ۵: دنباله هندسی ۱۳
آزمون ۶: جامع ۱۴

● فصل سوم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

- درسنامه ۱۸
آزمون ۷: توان و ریشه ۲۱
آزمون ۸: اتحاد و تجزیه (۱) ۲۲
آزمون ۹: اتحاد و تجزیه (۲) ۲۴
آزمون ۱۰: تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۲۵
آزمون ۱۱: جامع (۱) ۲۷
آزمون ۱۲: جامع (۲) ۲۸

● فصل چهارم: تابع درجه دوم و معادله درجه دوم

- درسنامه ۳۲
آزمون ۱۳: معادله درجه دوم (۱) ۳۳
آزمون ۱۴: معادله درجه دوم (۲) ۳۴
آزمون ۱۵: تابع درجه دوم ۳۶
آزمون ۱۶: جامع (۱) ۳۸
آزمون ۱۷: جامع (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۳۹

● فصل پنجم: تعیین علامت، معادله و نامعادله

- درسنامه ۴۲
آزمون ۱۸: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۱) ۴۴
آزمون ۱۹: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۲) ۴۵

● فصل ششم: مثلثات

- درسنامه ۴۸
آزمون ۲۰: مفاهیم اولیه (۱) ۵۳
آزمون ۲۱: مفاهیم اولیه (۲) ۵۵
آزمون ۲۲: اتحادهای مقدماتی (۱) ۵۷
آزمون ۲۳: اتحادهای مقدماتی (۲) ۵۸
آزمون ۲۴: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه ۶۰
آزمون ۲۵: معادلات مثلثاتی ۶۲
آزمون ۲۶: توابع مثلثاتی ۶۳
آزمون ۲۷: جامع (۱) ۶۵
آزمون ۲۸: جامع (۲) ۶۷
آزمون ۲۹: جامع (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۶۹

● فصل هفتم: قدرمطلق و جزء صحیح

- درسنامه ۷۲
آزمون ۳۰: قدرمطلق (۱) ۷۴
آزمون ۳۱: قدرمطلق (۲) ۷۵
آزمون ۳۲: توابع شامل قدرمطلق ۷۶
آزمون ۳۳: جزء صحیح ۷۹
آزمون ۳۴: جامع ۸۱

● فصل هشتم: تابع

- درسنامه ۸۴
- آزمون ۳۵: تعریف تابع و توابع خاص ۹۱
- آزمون ۳۶: دامنه و برد تابع ۹۲
- آزمون ۳۷: جبر توابع و ترکیب توابع (۱) ۹۴
- آزمون ۳۸: جبر توابع و ترکیب توابع (۲) ۹۶
- آزمون ۳۹: تبدیل نمودار تابع ۹۷
- آزمون ۴۰: توابع یک‌به‌یک و توابع یکنوا ۱۰۰
- آزمون ۴۱: تابع وارون ۱۰۱
- آزمون ۴۲: جامع (۱) ۱۰۳
- آزمون ۴۳: جامع (۲) ۱۰۵
- آزمون ۴۴: جامع (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۰۷

● فصل نهم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درسنامه ۱۱۰
- آزمون ۴۵: تابع نمایی ۱۱۲
- آزمون ۴۶: تابع لگاریتمی و خواص لگاریتم (۱) ۱۱۳
- آزمون ۴۷: تابع لگاریتمی و خواص لگاریتم (۲) ۱۱۵
- آزمون ۴۸: جامع (۱) ۱۱۷
- آزمون ۴۹: جامع (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۹

● فصل دهم: حد و پیوستگی

- درسنامه ۱۲۲
- آزمون ۵۰: مفهوم و قضایای حد (۱) ۱۲۷
- آزمون ۵۱: مفهوم و قضایای حد (۲) ۱۲۹
- آزمون ۵۲: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ۱۳۱
- آزمون ۵۳: پیوستگی ۱۳۲
- آزمون ۵۴: حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت ۱۳۴
- آزمون ۵۵: جامع (۱) ۱۳۶
- آزمون ۵۶: جامع (۲) ۱۳۸
- آزمون ۵۷: جامع (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۴۰

● فصل یازدهم: مشتق

- درسنامه ۱۴۴
- آزمون ۵۸: تعریف مشتق ۱۴۸
- آزمون ۵۹: قواعد مشتق‌گیری (۱) ۱۴۹
- آزمون ۶۰: قواعد مشتق‌گیری (۲) ۱۵۱
- آزمون ۶۱: آهنگ تغییر و خط مماس ۱۵۲
- آزمون ۶۲: جامع (۱) ۱۵۴
- آزمون ۶۳: جامع (۲) ۱۵۵
- آزمون ۶۴: جامع (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۷
- آزمون ۶۵: جامع (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۹

● فصل دوازدهم: کاربرد مشتق

- درسنامه ۱۶۲
- آزمون ۶۶: توابع یکنوا و اکسترم‌های نسبی (۱) ۱۶۵
- آزمون ۶۷: توابع یکنوا و اکسترم‌های نسبی (۲) ۱۶۶
- آزمون ۶۸: نقاط بحرانی و اکسترم‌های مطلق ۱۶۸
- آزمون ۶۹: جامع (۱) ۱۶۹
- آزمون ۷۰: جامع (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۷۱

● فصل سیزدهم: هندسهٔ مختصاتی

- درسنامه ۱۷۴
- آزمون ۷۱: خط راست ۱۷۹
- آزمون ۷۲: تفکر تجسمی و بیضی ۱۸۰
- آزمون ۷۳: دایره ۱۸۲
- آزمون ۷۴: جامع (۱) ۱۸۴
- آزمون ۷۵: جامع (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۸۵

● فصل چهاردهم: استدلال و هندسه

- درسنامه ۱۸۸
- آزمون ۷۶: استدلال و قضیهٔ تالس ۱۹۱
- آزمون ۷۷: تشابه و رابطه‌های طولی ۱۹۳
- آزمون ۷۸: جامع ۱۹۶

● فصل پانزدهم: آمار و احتمال

درسنامه ۲۰۰

آزمون ۷۹: آمار ۲۰۳

آزمون ۸۰: ترکیبیات (۱) ۲۰۴

آزمون ۸۱: ترکیبیات (۲) ۲۰۵

آزمون ۸۲: احتمال (۱) ۲۰۷

آزمون ۸۳: احتمال (۲) ۲۰۹

آزمون ۸۴: جامع (۱) ۲۱۰

آزمون ۸۵: جامع (۲) ۲۱۲

● فصل شانزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون ۸۶: جامع (۱) ۲۱۶

آزمون ۸۷: جامع (۲) ۲۱۸

آزمون ۸۸: جامع (۳) ۲۲۱

آزمون ۸۹: جامع (۴) ۲۲۳

آزمون ۹۰: جامع (۵) ۲۲۶

● فصل هفدهم: پاسخ‌های تشریحی ۲۳۰

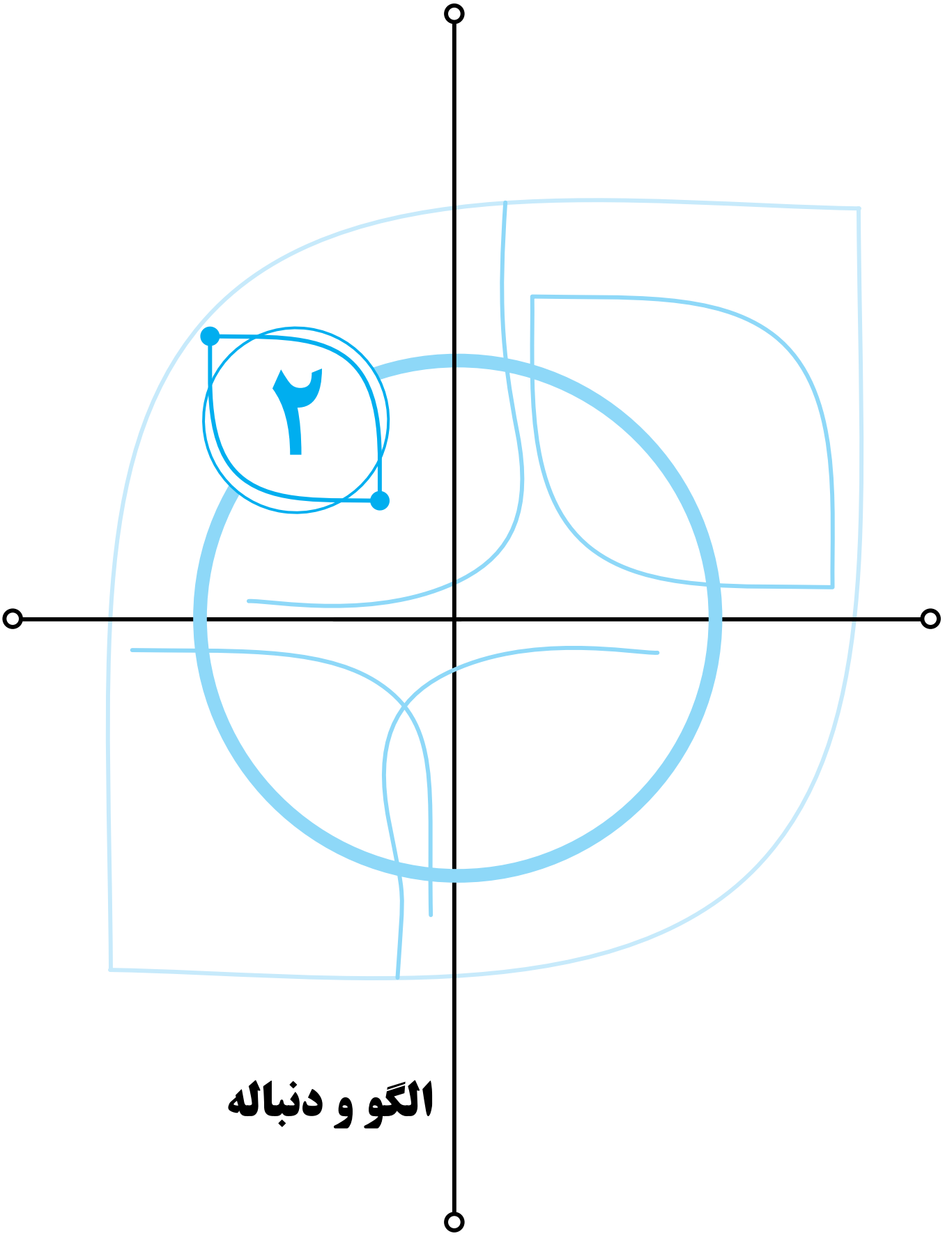
● کنکور سراسری ۹۸

آزمون ۹۱: داخل کشور ۴۲۷

آزمون ۹۲: خارج از کشور ۴۲۹

پاسخنامه کلیدی: ۴۳۲

پاسخنامه تشریحی QR Code



الگو و دنباله

فصل ۲

الگو و دنباله

الگوهایی که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی باشد، الگوهای خطی نامیده می‌شوند. در این الگوها جمله عمومی به شکل $t_n = an + b$ است.

جمله عمومی هر الگویی لزوماً خطی نیست. مثلاً الگوهایی که جمله عمومی آنها $t_n = n^2 + n$ یا $t_n = 2^n$ باشد، خطی نیستند.

اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ردیفی از عددها که دارای ترتیب باشند، دنباله نامیده می‌شود. عدد اول را جمله اول دنباله (a_1) ، عدد دوم را جمله دوم دنباله (a_2) ، ... و عدد n ام را جمله n ام دنباله (a_n) می‌نامند.

در دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ را جمله عمومی دنباله می‌نامند.

دنباله حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله، به جز جمله اول، با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبل از آن به دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** دنباله حسابی می‌نامند.

اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n رابطه زیر برقرار است:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

قدرنسبت دنباله حسابی را می‌توان از تفاضل هر دو جمله متوالی دنباله به دست آورد:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n$$

اگر جمله اول دنباله‌ای حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جمله n ام یا همان جمله عمومی دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

الگوی هر دنباله حسابی، خطی بوده و جمله عمومی آن به شکل $a_n = An + B$ است که در آن A برابر قدرنسبت است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = dn + a_1 - d$$

$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

تعداد جملات دنباله‌ای حسابی که جمله اول آن a_1 و جمله آخر آن a_n و قدرنسبت آن d باشد، برابر است با $\frac{a_n - a_1}{d} + 1$.

اگر a_m و a_n دو جمله متمایز از دنباله‌ای حسابی باشند، قدرنسبت این دنباله برابر است با $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.

اگر a_m, a_n, a_r, a_s جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند و $m+n = r+s$ ، آن‌گاه $a_m + a_n = a_r + a_s$.

اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، c **واسطه حسابی** a و b است و $c = \frac{a+b}{2}$.

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b > a$. اگر k عدد بین a و b بنویسیم به طوری که حاصل، دنباله‌ای حسابی باشد، گوئیم بین a و b به تعداد

k واسطه حسابی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه $d = \frac{b-a}{k+1}$ به دست می‌آید، زیرا b جمله $(k+2)$ ام دنباله و a جمله اول آن است.

اگر چند عدد دنباله‌ای حسابی متناهی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

سه عدد	$a-d, a, a+d$	قدر نسبت = d
چهار عدد	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$	قدر نسبت = $2d$
پنج عدد	$a-4d, a-d, a, a+d, a+2d$	قدر نسبت = d



دنباله هندسی دنباله‌ای است که جمله اول آن صفر نیست و در آن هر جمله به‌جز جمله اول از ضرب کردن عددی ثابت و غیر صفر در جمله قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** این دنباله هندسی می‌نامند.

اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، رابطه $a_{n+1} = a_n r$ برقرار است.

قدرنسبت دنباله هندسی را می‌توان از تقسیم هر دو جمله متوالی به‌دست آورد

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با $a_n = a_1 r^{n-1}$.

در دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots اگر $m+n=s+t$ ، آن‌گاه $a_m a_n = a_s a_t$.

اگر a, b و c سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، c را **واسطه هندسی** a و b می‌نامند و $c^2 = ab$.

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b > a$. اگر k عدد بین a و b را طوری بنویسیم که حاصل، دنباله‌ای هندسی باشد، گوییم بین a و b به تعداد k واسطه هندسی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید، زیرا جمله $(k+2)$ ام دنباله a جمله اول آن است.

اگر چند عدد دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

سه عدد	$\frac{a}{r}, a, ar$	قدر نسبت = r
چهار عدد هم‌علامت	$\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$	قدر نسبت = r^2
پنج عدد	$\frac{a}{r^4}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^4$	قدر نسبت = r

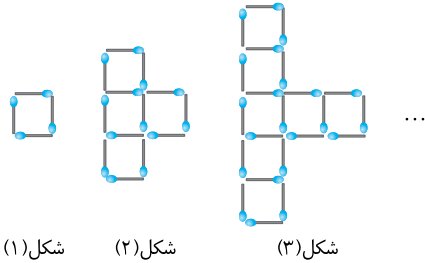
اگر دنباله‌ای هم حسابی باشد و هم هندسی، آن‌گاه تمام جملات آن برابرند (دنباله‌ای ثابت است).

الگو و دنباله



محاسبات

پاسخ: ۲۳۳ تا ۲۳۴



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

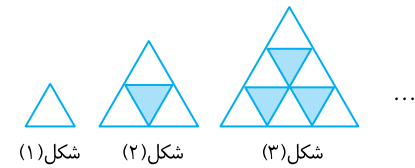
۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی زیر چقدر است؟

(۱) ۱۰۳

(۲) ۱۱۲

(۳) ۱۲۱

(۴) ۱۳۰



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۲- در الگوی مقابل، در شکل چندم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۳- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{8}{17}$ است؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

(۴) ۱۵

(۳) ۱۶

(۲) ۱۷

(۱) ۱۸

۴- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 3n^2 - n + 2a_1$ جمله چهارم چقدر است؟

(۴) ۴۰

(۳) ۴۴

(۲) ۴۶

(۱) ۵۰

۵- همه جمله‌های دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{2n-k}{5n+3}$ با هم برابرند. مقدار k چقدر است؟

(۴) $-\frac{7}{5}$

(۳) $-\frac{6}{5}$

(۲) $-\frac{4}{5}$

(۱) $-\frac{3}{5}$

۶- کدام جمله از دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{n^2+1}{81n^2-1}$ برابر $\frac{1}{80}$ است؟

(۴) a_{10}

(۳) a_9

(۲) a_8

(۱) a_7

۷- اگر جمله صدم دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{a\sqrt{n+7}}{\sqrt{n+1}}$ برابر $\frac{5}{22}$ باشد، مقدار جمله شانزدهم این دنباله چقدر است؟

(۴) $\frac{6}{5}$

(۳) $\frac{26}{25}$

(۲) $\frac{7}{5}$

(۱) $\frac{44}{25}$

۸- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 2n - 43$ چند جمله منفی وجود دارد؟

(۴) ۲۴

(۳) ۲۲

(۲) ۲۱

(۱) ۲۰

۹- چند جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -\log^2 n + 3 \log n - 2$ مثبت‌اند؟

(۴) ۹۱

(۳) ۹۰

(۲) ۸۹

(۱) ۸۸

۱۰- در دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{fn-1}{n+6}$ چند جمله کوچک‌تر از $\frac{3}{9}$ وجود دارد؟

(۴) ۲۴۱

(۳) ۲۴۲

(۲) ۲۴۳

(۱) ۲۴۴

۱۱- چند جمله از دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 + 2n - 8$ در بازه $(72, 160)$ قرار دارند؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۱۲- فاصله چند تا از جمله‌های دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{2n+1}{5n+1}$ تا $\frac{2}{5}$ از $\frac{1}{20}$ کمتر نیست؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳- در یک دنباله با جمله عمومی a_n ، $a_1 = 5$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $a_{n+1}a_n = 2$ برقرار است. حاصل ضرب بیست و یک جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) ۴۲۰۰ (۲) ۵۱۲۰ (۳) ۶۱۸۰ (۴) ۶۹۰۰

۱۴- در یک دنباله با جمله عمومی a_n ، $a_1 = 1$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ برقرار است. مقدار a_{100} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{99}$ (۲) $\frac{1}{100}$ (۳) $\frac{1}{101}$ (۴) $\frac{1}{102}$

۱۵- کوچک‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 - 24n + 1$ کدام است؟

- (۱) a_{24} (۲) a_{12} (۳) a_{10} (۴) a_6

۱۶- اگر بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -3n^2 + 12n + c$ برابر ۸ باشد، مقدار c چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۸ (۳) ۲۰ (۴) -۴

۱۷- در یک دنباله با جمله عمومی a_n ، $a_1 = 4$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $a_{n+1} = a_n + 2$ برقرار است. مجموع ده جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۳۱ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۳۳

۱۸- در مورد دنباله با جمله عمومی a_n می‌دانیم $a_1 = 5$ و به ازای هر عدد طبیعی n ، $a_{n+1} = 9 - a_n$. مجموع بیست جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۸۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۱۹- مجموع بیست جمله نخست دنباله با جمله عمومی $a_n = n - 2\left[\frac{n}{2}\right]$ چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۲۰- چند جمله از ابتدای دنباله با جمله عمومی $a_n = \log_p \frac{n}{n+1}$ را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

دنباله حسابی

۴

پاسخ: ۲۳۴ تا ۲۳۶

۱- اگر $a+b$ ، $a+c$ ، $b+c$ سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

- (۱) b, a, c (۲) b, c, a (۳) a, c, b (۴) a, b, c

۲- در دنباله حسابی $\dots, 4x-2, 3x-4, 3x-1$ جمله چهارم کدام است؟

- (۱) -۱۹ (۲) -۲۲ (۳) -۲۳ (۴) -۲۵

۳- اگر ریشه‌های معادله $(x-a)(x^2 - 8x + 12) = 0$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، a چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۴- در یک دنباله، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 1$ ، $a_n - a_{n+1} = 2$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{10}}{a_5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

۵- اگر در دنباله‌ای حسابی $3a_4 + 4a_5 - 7a_6 = 124$ ، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۸

۶- جمله عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n = \frac{5-2n}{3}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جمله اول کمتر است؟

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۷- در دنباله‌ای حسابی $a_9 = -1$ و $a_{21} = -7$. قدرنسبت این دنباله حسابی چقدر است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -3 (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -1

۸- چندمین جمله از دنباله حسابی $\dots, 5, 2, -1$ برابر ۲۱۸ است؟

(۱) هفتاد و یکم (۲) هفتاد و چهارم (۳) هفتاد و پنجم (۴) هفتاد و هشتم

۹- در دنباله‌ای حسابی، جمله دهم ۳۲ واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جمله چهارم دنباله برابر ۱۵ باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۰- جمله عمومی دنباله حسابی $\dots, -3a, -1, 2a, a$ کدام است؟

(۱) $1 - \frac{n}{2}$ (۲) $n - \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} - n$ (۴) $\frac{n}{2} + 1$

۱۱- در دنباله‌ای حسابی $a_1 + a_3 = 16$ و $a_1 + a_5 + a_8 = 51$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۲- در دنباله‌ای حسابی $a_3^2 - a_2^2 = 80$ و $3a_5 + a_3 = 8$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل ضرب نه جمله نخست این دنباله حسابی برابر $10^8 \times 10^8$ است. جمله دهم این دنباله چقدر است؟

(۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۹۰۰ (۴) ۱۰۰۰

۱۴- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{3} - 5$ و $\sqrt{3} + 5$ ، چهار واسطه حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{3} - 5$					$\sqrt{3} + 5$
----------------	--	--	--	--	----------------

(۱) $\sqrt{3} - 4$ (۲) $\sqrt{3} - 3$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3} - 1$

۱۵- سه زاویه مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازه زاویه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر این مثلث کدام است؟

(۱) 45° (۲) 60° (۳) 75° (۴) 90°

۱۶- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازه زاویه کوچک‌تر برابر 86° باشد، اندازه زاویه بزرگ‌تر کدام است؟

(۱) 110° (۲) 115° (۳) 120° (۴) 130°

۱۷- مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) $\pm \frac{1}{2}$ (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

۱۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویه قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویه قائمه این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۹- مجموع چهار جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۸۰ است. حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

(۱) -18 (۲) -27 (۳) -36 (۴) -45

۲۰- a, b و c عددهایی حقیقی و مثبت‌اند، a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند و $abc = 4$. کمترین مقدار ممکن b چقدر است؟

(۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\sqrt[3]{16}$ (۴) $\sqrt[3]{32}$

۱- در دنباله‌ای با جمله عمومی a_n می‌دانیم $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n$. اگر $a_3 = 3$ ، مقدار a_{29} چقدر است؟

(۱) $\frac{3^{27}}{2^{26}}$ (۲) $\frac{3^{28}}{2^{27}}$ (۳) $\frac{3^{29}}{2^{28}}$ (۴) $\frac{3^{30}}{2^{29}}$

۲- اگر $2^{x-4}, 4^{3x}, 8^{2-3x}, \dots$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $-\frac{1}{10}$

۳- واسطه حسابی ریشه‌های معادله‌ای درجه دوم $\frac{4}{5}$ و واسطه هندسی ریشه‌های آن $\frac{1}{5}$ است. این معادله کدام است؟

(۱) $4x^2 - 36x + 9 = 0$ (۲) $4x^2 + 36x + 9 = 0$
(۳) $x^2 - 18x + 9 = 0$ (۴) $x^2 + 18x + 9 = 0$

۴- اگر سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی $\sqrt{a}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{2}$ باشند، جمله سیزدهم این دنباله چقدر است؟

(۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $2\sqrt[6]{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) $4\sqrt[6]{2}$

۵- اگر جمله هفتم دنباله هندسی $\log_4 a, \log_{16} a, \dots$ برابر $\frac{1}{32}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۶- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_1 a_6 = 27$ و $a_4 a_9 = 9$. مقدار a_5 کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۲۷ (۴) ۸۱

۷- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{4}$ ، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۸- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱، $a_5 - a_1 = 130$ و $a_6 - a_2 = 25$. مقدار a_7 چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{5}{24}$ (۳) $\frac{15}{24}$ (۴) $\frac{25}{24}$

۹- بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $16\sqrt{2}$ هفت واسطه هندسی درج می‌کنیم (جمله اول $\sqrt{2}$ است). جمله سوم دنباله حاصل کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $32\sqrt{2}$ (۴) $64\sqrt{2}$

۱۰- بین اعداد مثبت a و b پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم (جمله اول a است). اگر چهار واسطه هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۱- حاصل ضرب پنج جمله متوالی دنباله‌ای هندسی برابر 10^{24} است. جمله وسط کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۲- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۳- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

(۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$ (۴) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}}$

۱۴- اعداد a, n, b سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر f واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی

می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

- ۲۰ (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۴ (۴)

۱۵- جملات سوم، پنجم و ششم دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = a - n$ سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جمله

دهم دنباله حسابی کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۱۶- اگر اعداد $x+4$ ، $2x+y$ و $2y+x$ سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی باشند،

مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

۱۷- در یک دنباله حسابی غیر ثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله هندسی‌اند. نسبت

جمله چهارم دنباله هندسی به جمله دوازدهم دنباله حسابی چقدر است؟

- $\frac{23}{26}$ (۱) $\frac{25}{26}$ (۲) $\frac{27}{26}$ (۳) $\frac{29}{26}$ (۴)

۱۸- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی

کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۱۹- جمله هشادونهم دنباله حسابی $\dots, -\frac{95}{8}, -12, \dots$ با جمله ششم دنباله هندسی $\dots, 243, \dots$ برابر است. قدرنسبت دنباله

هندسی چقدر است؟

- ۳ (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۲۰- a_1, a_2 و a_3 سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی هستند، $a_1 > 0$ و $9a_1 + 5a_3 > 14a_2$. قدرنسبت این دنباله در

کدام بازه نمی‌تواند باشد؟

- $[2, +\infty)$ (۱) $[\frac{5}{9}, 1]$ (۲) $[1, \frac{9}{5}]$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴)

آزمون جامع

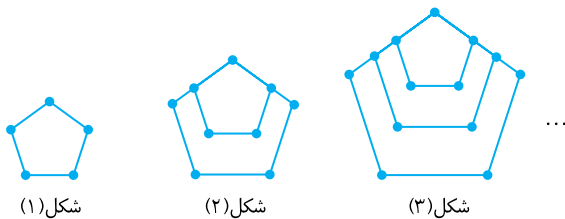


پاسخ: ۲۳۷ تا ۲۳۹

۱- تعداد نقاط رنگی روی شکل پانزدهم از الگوی

مقابل کدام است؟

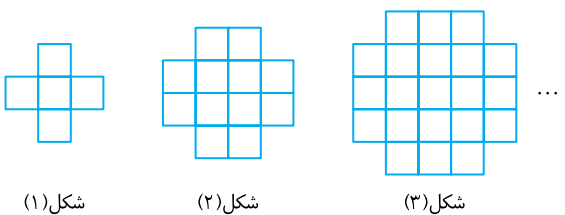
- ۶۰ (۱)
۶۱ (۲)
۵۰ (۳)
۵۱ (۴)



۲- الگوی مقابل از مربع‌های 1×1 ساخته شده است.

مساحت شکل هشتم کدام است؟

- ۶۴ (۱)
۶۰ (۲)
۹۶ (۳)
۱۰۰ (۴)



- ۳- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 95n - n^2$ چند جمله مثبت وجود دارد؟
- ۸۹ (۴) ۹۰ (۳) ۹۴ (۲) ۹۵ (۱)
- ۴- بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -2n^2 + 19n + 1$ چقدر است؟
- ۴۸ (۴) ۴۷ (۳) ۴۶ (۲) ۴۵ (۱)
- ۵- اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ باشد، چند جمله این دنباله در بازه $(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ هستند؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶- در دنباله‌ای حسابی $a_5 = 2a_1$. مقدار $15a_{15}$ چقدر است؟
- صفر (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۷- در دنباله‌ای حسابی $a_3 + a_7 = 0$ و $a_3 + a_7 = 128$. قدرنسبت دنباله کدام است؟
- ± 6 (۴) ± 4 (۳) ± 2 (۲) ± 3 (۱)
- ۸- اگر $\log_2(16a)$ ، $\log_2(3a+4)$ و $\log_2 a$ سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a چقدر است؟
- ۸ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)
- ۹- جمله اول دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 2 - 3n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جمله بیست و یکم دنباله حسابی جدید کدام است؟
- ۵۷ (۴) ۵۵ (۳) ۵۲ (۲) ۵۰ (۱)
- ۱۰- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع جمله اول و جمله بیستم دنباله چقدر است؟
- ۵ (۴) ۱۰ (۳) ۱۵ (۲) ۲۰ (۱)
- ۱۱- در یک دنباله حسابی با n جمله، مجموع سه جمله اول برابر $6 - \sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر برابر $6 + \sqrt{2}$ است. مجموع جمله اول و جمله آخر دنباله کدام است؟
- ۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)
- ۱۲- اگر x واسطه حسابی $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ و y واسطه هندسی $\tan^2 \alpha$ و $\cot^2 \alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ ($y > 0$)
- $\frac{5}{2}$ (۴) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)
- ۱۳- حاصل ضرب پانزده جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ کدام است؟
- 2^{90} (۴) 2^{75} (۳) 2^{60} (۲) 2^{30} (۱)
- ۱۴- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟
- | | | | | |
|-----|---------------|-----|-----|----|
| x | $\frac{1}{2}$ | y | z | ۳۲ |
|-----|---------------|-----|-----|----|
- ۱۶ (۴) ۸ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)
- ۱۵- اگر عددهای $3x-1$ ، $2x+3$ و $y-9$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟
- ۲۴ (۴) ۲۲ (۳) ۲۸ (۲) ۳۲ (۱)
- ۱۶- در جدول مقابل عددهای ستون A از بالا به پایین جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند و عددهای سطر B از چپ به راست جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی. مقدار $a+b$ چقدر است؟
- | | | | | | |
|---|-----------------|---|--|----|---|
| | A | | | | |
| | $\frac{0}{125}$ | | | | |
| | | | | | |
| B | ۴ | | | ۲۰ | b |
| | | a | | | |
- ۵۶ (۱)
۵۸ (۲)
۶۰ (۳)
۶۲ (۴)

۱۷- اگر x, y, z, t جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، $x+z=2^0$ و $y+t=6^0$ ، قدرنسبت این دنباله هندسی چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- در دنباله‌ای هندسی $a_5 - a_3 = 96$ و $a_8 - a_6 = 12$. جمله پنجم این دنباله چقدر است؟

- (۱) -۶۴ (۲) -۱۶ (۳) -۳۲ (۴) -۸

۱۹- اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی و غیرثابت باشند و $a+b+c=kb$ ، کدام درست است؟

- (۱) $-1 \leq k < 3$ (۲) $k \leq -1$ یا $k > 3$ (۳) $-1 \leq k < 2$ (۴) $k \leq -1$ یا $k > 2$

۲۰- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی غیرثابت جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنباله هندسی عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a_{100} = \frac{5}{22} \Rightarrow \frac{a\sqrt{100+7}}{\sqrt{100+1}} = \frac{10a+7}{11} = \frac{5}{22} \Rightarrow a = -\frac{9}{20}$$

$$\text{بنابراین } a_{16} = \frac{fa+7}{f+1} = \frac{-\frac{9}{20}+7}{5} = \frac{26}{25}$$

۸- گزینه ۲ با حل نامعادله $a_n < 0$ ، مقادیری از n را پیدا می‌کنیم

که به ازای آنها a_n منفی است:

$$a_n < 0 \Rightarrow 2n - 43 < 0 \Rightarrow n < \frac{43}{2}$$

بنابراین $n \leq 21$ و بیست و یک جمله اول دنباله منفی هستند.

۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a_n = -(\log^2 n - 3 \log n + 2) = -(\log n - 2)(\log n - 1)$$

بنابراین

$$a_n > 0 \Rightarrow (\log n - 2)(\log n - 1) < 0 \Rightarrow 1 < \log n < 2 \Rightarrow 10 < n < 10^2$$

یعنی $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{99}$ مثبت‌اند، که تعداد آن‌ها ۸۹ تا است.

۱۰- گزینه ۲ باید ببینیم نامعادله $a_n < 3/9$ برای کدام مقادیر n

درست است:

$$\frac{fn-1}{n+6} < \frac{39}{10} \Rightarrow 40n - 10 < 39n + 39 \times 6 \Rightarrow n < 244$$

بنابراین $n \leq 243$ ، یعنی ۲۴۳ جمله اول دنباله کمتر از $3/9$ هستند.

۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$72 < a_n < 160 \Rightarrow 72 < n^2 + 2n - 8 < 160$$

بنابراین

$$n^2 + 2n - 8 < 160 \Rightarrow (n-12)(n+14) < 0 \Rightarrow 1 \leq n < 12 \Rightarrow 1 \leq n \leq 11$$

$$n^2 + 2n - 8 > 72 \Rightarrow (n-8)(n+10) > 0 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow n \geq 9$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\left| \frac{2n+1}{5n+1} - \frac{2}{5} \right| \geq \frac{1}{20} \Rightarrow \left| \frac{10n+5-10n-2}{25n+5} \right| \geq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{3}{25n+5} \geq \frac{1}{20}$$

$$25n+5 \leq 60 \Rightarrow 25n \leq 55$$

$$n \leq \frac{55}{25} \xrightarrow{\text{عدد طبیعی است}} n=1, n=2$$

پس فاصله دو تا از جمله‌های دنباله a_n تا $\frac{2}{5}$ از $\frac{1}{20}$ کمتر نیست.

۱۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P = a_1 a_2 a_3 \dots a_{21} = a_1 (a_2 a_3) (a_4 a_5) \dots (a_{20} a_{21})$$

بنابراین با توجه به روابط $a_2 a_3 = 2, a_4 a_5 = 2, \dots, a_{20} a_{21} = 2$ نتیجه

$$P = 5 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{10} = 5 \times 2^{10} = 5 \times 1024 = 5120$$

۱۴- گزینه ۲ به چند جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_{100} = \frac{1}{100}$

چون $n(A \cup B)$ عددی طبیعی است، پس $\frac{19t}{3}$ نیز عددی طبیعی است.

کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند t که این ویژگی را دارد برابر ۳۰ است، که به ازای آن کمترین مقدار $n(A \cup B)$ به دست می‌آید که برابر ۱۹ است.

آزمون ۳

۱- گزینه ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل،

۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل n ام، $4+9(n-1)$ یعنی $9n-5$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۲- گزینه ۱ در شکل n ام تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$0+1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

برای این که بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=9$ ، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۳- گزینه ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر است با

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل n ام برابر است با

$$1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر

$$\frac{n(n-1)}{n^2}$$

است با $\frac{2}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$. به این ترتیب

$$\frac{n-1}{2n} = \frac{2}{n^2} \Rightarrow n=17$$

۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_n = 3n^2 - n + 2a_1 \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 - 1 + 2a_1 \Rightarrow a_1 = -2$$

بنابراین $a_4 = 3 \times 16 - 4 + 2(-2) = 40$

۵- گزینه ۳ چون همه جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های

اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8} = \frac{4-k}{13} \Rightarrow 26-13k = 32-8k \Rightarrow 5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر $k = -\frac{6}{5}$ ، آن‌گاه $a_n = \frac{2}{5}$

۶- گزینه ۳ با حل معادله $a_n = \frac{1}{80}$ مقدار n را که شماره جمله مورد

نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2+1}{81n^2-1} = \frac{1}{80} \Rightarrow 80n^2+80 = 81n^2-1 \Rightarrow n^2 = 81 \Rightarrow n=9$$

بنابراین a_9 برابر $\frac{1}{80}$ است.

بنابراین

$$-\log_7(n+1) = -3 \Rightarrow n+1 = 8 \Rightarrow n = 7$$

آزمون ۴

۱- گزینه ۴ راه‌حل اول چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی

است، پس

$$a+c-(a+b) = (b+c)-(a+c) \Rightarrow c-b = b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c = \frac{a+b+b+c}{2} \Rightarrow 2(a+c) = a+2b+c \Rightarrow a+c = 2b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۲- گزینه ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x - 4 - (3x - 1) = -3$$

بنابراین

$$4x - 2 = 3x - 4 - 3 \Rightarrow x = -5$$

بنابراین جمله سوم دنباله برابر است با $4(-5) - 2 = -22$ و جمله چهارم برابر

$$\text{است با } -22 - 3 = -25.$$

۳- گزینه ۲ چون $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$ پس ریشه‌های

معادله مورد نظر $a, 2$ و 6 هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$6, 2, a \Rightarrow \frac{6+a}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$6, a, 2 \Rightarrow \frac{6+2}{2} = a \Rightarrow a = 4$$

$$2, 6, a \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 10$$

$$2, a, 6 \Rightarrow \frac{2+6}{2} = a \Rightarrow a = 4$$

$$a, 2, 6 \Rightarrow \frac{a+6}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$a, 6, 2 \Rightarrow \frac{a+2}{2} = 6 \Rightarrow a = 10$$

بنابراین a سه مقدار مختلف ممکن است داشته باشد.

۴- گزینه ۳ چون $a_{n+1} - a_n = -2$ پس دنباله مورد نظر دنباله‌ای

حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جمله اول برابر 3 است، پس

$$a_1 = a_1 + 9d = 3 + 9(-2) = -15, \quad a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4(-2) = -5$$

بنابراین

$$\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{-15}{-5} = 3$$

۵- گزینه ۲ از رابطه داده شده به دست می‌آید

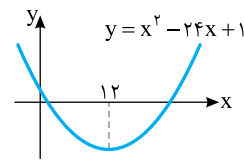
$$3(a_1 + 3d) + 4(a_1 + 4d) - 7(a_1 + 8d) = 124$$

$$\text{پس } 31d = 124 \text{ و در نتیجه } d = -4$$

۱۵- گزینه ۲ کمترین مقدار تابع درجه دوم $y = x^2 - 24x + 1$ به ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{24}{2} = 12 \text{ به دست می‌آید. بنابراین در میان } a_1, a_2, \dots \text{ از بقیه}$$

کوچک‌تر است.



۱۶- گزینه ۴ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = -3x^2 + 12x + c$ به ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-6} = 2 \text{ به دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جمله}$$

دنباله مورد نظر برابر a_p است. در نتیجه

$$a_p = 8 \Rightarrow -3 \times 4 + 12 \times 2 + c = 8 \Rightarrow c = -4$$

۱۷- گزینه ۱ به جملات دنباله توجه کنید:

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 6 + 2 = 8 = 4 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 8 + 2 = 10 = 4 + 3 \times 2$$

⋮

$$a_{10} = 4 + 9 \times 2 = 22$$

به این ترتیب

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 4 + 6 + 8 + \dots + 22 = 2(2 + 3 + \dots + 11)$$

$$= 2 \left(\frac{11 \times 12}{2} - 1 \right) = 130$$

۱۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 9 - a_1 = 9 - 5 = 4$$

$$a_3 = 9 - a_2 = 9 - 4 = 5$$

⋮

بنابراین جملات دنباله یکی در میان 5 و 4 هستند. پس در بیست جمله اول دنباله ده تا 5 و ده تا 4 وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر 90 است.

۱۹- گزینه ۲ توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، آن گاه $\frac{n}{2}$ عددی

صحیح است. پس $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$ و در نتیجه $a_n = n - 2\left(\frac{n}{2}\right) = 0$ و اگر n عددی

فرد باشد، آن گاه $\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است که با $\left[\frac{n}{2}\right]$ برابر است. پس در این

حالت $a_n = n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right) = 1$. بنابراین دنباله به صورت $1, 0, 1, 0, \dots$ است

و مجموع بیست جمله اول آن برابر 10 است.

۲۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a_1 = \log_2 \frac{1}{2}, \quad a_2 = \log_2 \frac{2}{3}, \quad a_3 = \log_2 \frac{3}{4}, \quad \dots$$

بنابراین مجموع n جمله اول دنباله به صورت زیر است:

$$S_n = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{n-1}{n} + \log_2 \frac{n}{n+1}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right) = \log_2 \frac{1}{n+1} = -\log_2(n+1)$$

۱۳- گزینه ۲ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_1 = d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = d + (n-1)d = nd$$

به این ترتیب

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 10^8 \times 10^8 \Rightarrow d(2d)(3d) \dots (9d) = 10^8 \times 10^8!$$

$$d^9 \times 9! = 10^8 \times 9! \Rightarrow d = 10$$

بنابراین $a_{10} = 10d = 100$.

۱۴- گزینه ۲ چون $a_1 = \sqrt{3} - 5$ و $a_2 = \sqrt{3} + 5$ ، پس

$$a_2 = a_1 + 5d \Rightarrow \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} - 5 + 5d \Rightarrow d = 2$$

بنابراین کوچکترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3} - 5 + 2$ یا همان $\sqrt{3} - 3$ است.

۱۵- گزینه ۲ اندازه زاویه‌های مثلث را به صورت $a-d, a, a+d$ در

نظر می‌گیریم. مجموع اندازه زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d + a + a+d = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$$

میانگین زاویه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر همان a است که برابر 60° است.

۱۶- گزینه ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازه زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d + a-d + a + a+d + a+2d = 540^\circ$$

بنابراین $5a = 540^\circ$ و در نتیجه $a = 108^\circ$. اندازه زاویه کوچک‌تر 86° است.

پس $a-2d = 86^\circ$ و در نتیجه $d = 11^\circ$. پس اندازه زاویه بزرگ‌تر یعنی

$$a+2d = 108^\circ + 2 \times 11^\circ = 130^\circ.$$

۱۷- گزینه ۴ سه جمله متوالی دنباله را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d + a + a+d = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 45 \Rightarrow a(a^2 - d^2) = 45$$

$$\xrightarrow{a=5} 5(25 - d^2) = 45 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$$

۱۸- گزینه ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس،

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویه قائمه

a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d} = \frac{4d}{4d-d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$$

۱۹- گزینه ۳ چهار جمله متوالی دنباله را به صورت زیر در نظر

می‌گیریم: $a-3d, a-d, a+d, a+3d$. بنابراین

$$a-3d + a-d + a+d + a+3d = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس دنباله به صورت $-3d, -d, d, 3d$ است و

$$9d^2 + d^2 + d^2 + 9d^2 = 80 \Rightarrow d^2 = 4$$

بنابراین، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد برابر است با

$$(3d)(-3d) = -9d^2 = -36$$

۶- گزینه ۴ راه‌حل اول با قرار دادن $n=1$ در جمله عمومی به دست

می‌آید $a_1 = 1$. با قرار دادن $n=2$ در جمله عمومی به دست می‌آید $a_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{بنابراین } a_2 - a_1 = -\frac{2}{3} = d. \text{ پس } a_1 - d = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

راه‌حل دوم جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a_1 به

صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است، بنابراین

$$a_n = dn + (a_1 - d) = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3}$$

$$\text{پس } a_1 - d = \frac{5}{3}$$

۷- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$d = \frac{a_{21} - a_9}{21 - 9} = \frac{-7 - (-1)}{12} = -\frac{1}{2}$$

۸- گزینه ۲ چون $a_1 = -1$ و $d = 3$ ، پس $a_n = -1 + 3(n-1)$

یعنی $a_n = 3n - 4$. بنابراین باید $3n - 4 = 218$ ، پس $n = 74$.

۹- گزینه ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_{10} - a_2}{10 - 2} = -\frac{32}{8} = -4$$

بنابراین $a_2 = a_1 + 3d = a_1 - 12 = 15$ و در نتیجه $a_1 = 27$. بنابراین جمله

عمومی دنباله می‌شود $a_n = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n > 0 \Rightarrow 31 - 4n > 0 \Rightarrow n \leq 7$$

بنابراین هفت جمله نخست دنباله مثبت هستند.

۱۰- گزینه ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$2a - 1 = \frac{a + 1 - 3a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $d = (2a - 1) - a = a - 1 = -\frac{1}{2}$. پس جمله عمومی دنباله به شکل زیر

است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = 1 - \frac{n}{2}$$

۱۱- گزینه ۲ از $a_1 + a_p = 16$ نتیجه می‌شود

$$a_1 + a_1 + 2d = 16 \Rightarrow a_1 + d = 8$$

چون $a_2 + a_5 + a_8 = 51$ ، پس

$$a_1 + d + a_1 + 4d + a_1 + 7d = 51 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 51$$

$$\text{از حل دستگاه } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 3a_1 + 12d = 51 \end{cases} \text{ به دست می‌آید } d = 3$$

۱۲- گزینه ۲ چون $80 = 9a_5^2 - a_3^2 = (3a_5 - a_3)(3a_5 + a_3)$

پس $3a_5 - a_3 = 10$. در نتیجه از حل دستگاه $\begin{cases} 3a_5 - a_3 = 10 \\ 3a_5 + a_3 = 8 \end{cases}$ به دست

$$\text{می‌آید } a_5 = 3 \text{ و } a_3 = -1. \text{ بنابراین } d = \frac{a_5 - a_3}{5 - 3} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

۶- گزینه ۳ از تساوی $a_1 a_6 = 27$ نتیجه می‌شود

$$a_1 \times a_1 r^5 = 27 \Rightarrow a_1^2 r^5 = 27$$

از تساوی $a_4 a_9 = 9$ به دست می‌آید

$$a_1 r \times a_1 r^8 = 9 \Rightarrow a_1^2 r^9 = 9$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1^2 r^5}{a_1^2 r^9} = \frac{27}{9} \Rightarrow r = 3$$

با جای گذاری $r = 3$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_1 = \pm \frac{1}{3}$. چون

جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_1 = \frac{1}{3}$ و در نتیجه

$$a_6 = a_1 r^5 = \frac{1}{3} \times 3^5 = 27$$

۷- گزینه ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5 + a_8 = a_1 r^4 + a_1 r^7 = a_1 r^4 (1 + r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_7 + a_{10} = a_1 r^6 + a_1 r^9 = a_1 r^6 (1 + r^3)$$

بنابراین

$$\frac{a_5 + a_8}{a_7 + a_{10}} = \frac{a_1 r^4 (1 + r^3)}{a_1 r^6 (1 + r^3)} = \frac{1 + r^3}{r^2 (1 + r^3)} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})} = 7$$

۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_6 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 r^5 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 (r^5 - 1) = 130$$

$$a_9 - a_4 = 250 \Rightarrow a_1 r^8 - a_1 r = 250 \Rightarrow a_1 r (r^7 - 1) = 250$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{r^5 - 1}{r(r^7 - 1)} = \frac{130}{250} \Rightarrow \frac{(r^5 - 1)(r^2 + 1)}{r(r^7 - 1)} = \frac{13}{25}$$

$$\delta(r^2 + 1) = 26r \Rightarrow \delta r^2 - 26r + \delta = 0 \Rightarrow r = 5, r = \frac{1}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

به این ترتیب،

$$a_1 r (r^7 - 1) = 250 \Rightarrow a_1 \times 5 \times 24 = 250 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{24}$$

$$\text{در نتیجه } a_4 = a_1 r^3 = \frac{25}{24}$$

۹- گزینه ۱ این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 16\sqrt{2}$$

پس $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_9 = 16\sqrt{2}$. بنابراین

$$a_1 r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow (r^2)^4 = 2^4 \Rightarrow r^2 = 2$$

$$\text{در نتیجه } a_4 = a_1 r^3 = 2\sqrt{2}$$

۱۰- گزینه ۳ در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم، $r^6 = \frac{b}{a}$

در حالتی که چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم، $(2r)^5 = \frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^6 = (2r)^5 \Rightarrow r = 32$$

۲۰- گزینه ۲ اگر قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر d باشد، آن‌گاه $a = b - d$ و $c = b + d$. بنابراین

$$abc = 4 \Rightarrow (b-d)b(b+d) = 4 \Rightarrow b(b^2 - d^2) = 4$$

$$b^3 = 4 + bd^2 \geq 4 \quad (b > 0, d^2 \geq 0) \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{4}$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن b برابر $\sqrt[3]{4}$ است.

آزمون ۵

۱- گزینه ۱ دنباله a_n دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{2}$ است. در

نتیجه

$$a_3 = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$a_{29} = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{3^{27}}{2^{26}}$$

۲- گزینه ۳ چون 4^{3x} واسطه هندسی 2^{x-4} و 8^{2-3x} است، پس

$$(4^{3x})^2 = 2^{x-4} \times 8^{2-3x} \Rightarrow 2^{12x} = 2^{x-4} \times 2^{6-9x} \Rightarrow 2^{12x} = 2^{2-8x}$$

بنابراین $12x = 2 - 8x$ ، یعنی $x = \frac{1}{10}$.

۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند. در این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

$$\sqrt{x_1 x_2} = 1/5 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل $x^2 - 9x + \frac{9}{4} = 0$ است که اگر دو طرف آن

را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2 - 36x + 9 = 0$.

۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[4]{2}$ واسطه هندسی \sqrt{a} و $\sqrt[3]{2}$ است:

$$(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ ، در نتیجه

$$a_{13} = a_1 r^{12} = \sqrt{a} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2^4}{2^3}\right) = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} (2) = 2\sqrt[3]{2}$$

۵- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با

$$\frac{\log a}{\log_{16} a} = \frac{\log 16}{\log 4} = \frac{\log 4}{\log 16} = \frac{\log 4}{2 \log 4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow \frac{1}{32} = \log_4 a \times \frac{1}{64} \Rightarrow \log_4 a = 2 \Rightarrow a = 4^2 = 16$$

۱۱- گزینه ۳ این جملات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

بنابراین

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 1024 \Rightarrow a^5 = 21^0 = 4^5$$

در نتیجه جمله وسط برابر ۴ است.

۱۲- گزینه ۳ این سه عدد را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \Rightarrow a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 14$$

$$4\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 14 \Rightarrow 4r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$$

بنابراین سه جمله مورد نظر به صورت‌های زیر هستند:

$$8, 4, 2, \quad 2, 4, 8$$

در هر صورت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۳- گزینه ۲ طول اضلاع مثلث a, ar, ar^2 در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس، $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2) = a^2r^4 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۴- گزینه ۱ چون ۸ واسطه حسابی عددهای a و b است، پس

$$a + b = 16$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطه هندسی عددهای a و $b+4$ می‌شود.

بنابراین $a^2 - 2 \cdot a + 64 = 0$. پس $64 = a(b+4) = a(16-a+4) = 20a - a^2$

و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است.

۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a_3 = a - 3, \quad a_5 = a - 5, \quad a_6 = a - 6$$

بنابر فرض، $(a-5)^2 = (a-3)(a-6)$. بنابراین

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 9a + 18 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه $a_1 = 7 - 10 = -3$.

۱۶- گزینه ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله

ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} 2y + x = 2x + y \\ 2y + x = x + 4 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می‌آید $x = y = 2$ ، پس $\frac{x}{y} = 1$.

۱۷- گزینه ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنباله حسابی را به ترتیب

$a+2d, a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات دنباله

هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2 = (a+2d)(a+7d) \Rightarrow 2d^2 = ad \Rightarrow a = 2d$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت $4d, 6d, 9d, \dots$ است که جمله چهارم آن

$\frac{27}{4}d$ است. همچنین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت زیر است:

$$a_n = a + (n-1)d = 2d + (n-1)d = (n+1)d$$

به این ترتیب $a_{13} = 13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{27}{13d} = \frac{27}{26}$.

۱۸- گزینه ۴ راه‌حل اول جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله

حسابی را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم: $a+d, a+5d, a+13d$. چون

این اعداد دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+5d)^2 = (a+d)(a+13d) \Rightarrow 12d^2 = 4ad \Rightarrow a = 3d$$

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با $r = \frac{a+5d}{a+d} = \frac{3d+5d}{3d+d} = \frac{8d}{4d} = 2$

راه‌حل دوم فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی برابر d باشد، چون

a_4, a_6, a_{14} جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند، پس

$$\frac{a_6}{a_4} = \frac{a_{14}}{a_6} = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_4}$$

$$\frac{a_1+5d}{a_1+d} = \frac{a_1+13d}{a_1+5d} \Rightarrow \frac{a_1+13d-(a_1+5d)}{a_1+5d-(a_1+d)} = \frac{8d}{4d} = 2$$

۱۹- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله حسابی برابر است با

$\frac{95}{8} - (-12) = \frac{1}{8}$. بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت

$a_n = -12 + \frac{1}{8}(n-1)$ است. در نتیجه جمله هشتادونهم این دنباله برابر

است با $a_{80} = -12 + \frac{1}{8}(80-1) = -1$. اگر قدرنسبت دنباله هندسی را با r

نشان دهیم، آن‌گاه

$$243r^5 = (3r)^5 = 243r^5$$

بنابراین

$$(3r)^5 = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

۲۰- گزینه ۳ اگر قدرنسبت دنباله برابر r باشد، آن‌گاه $a_4 = ar^3$ و

بنابراین $a_4 = ar^3$.

$9a_1 + 5a_4 > 14a_2 \Rightarrow 9a_1 + 5a_1r^3 > 14a_1r \Rightarrow 9 + 5r^3 > 14r$ ($a_1 > 0$)

$$5r^3 - 14r + 9 > 0 \Rightarrow (5r-9)(r-1) > 0$$

بنابراین r در بازه $\left[1, \frac{9}{5}\right]$ نیست.

آزمون ۶

۱- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله

۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام به تعداد $4(n-1) + 5 = 4n + 1$ نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است:

یعنی شکل n ام $4n + 1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۲- گزینه ۳ اگر ۴ مربع 1×1 را که در چهار گوشه شکل‌ها حذف شده

است به شکل‌ها اضافه کنیم، در مرحله n ام یک مربع بزرگ داریم که $(n+2)$ مربع 1×1 در هر سطر و $(n+2)$ مربع 1×1 در هر ستون دارد. پس مساحت

آن $(n+2)^2$ است. بنابراین مساحت شکل n ام برابر است با

$$(n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n$$

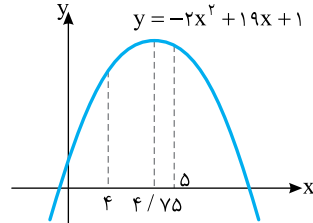
پس مساحت شکل هشتم برابر است با $8^2 + 4 \times 8 = 96$.

۳- گزینه ۲ از شرط $a_n > 0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n > 0 \Rightarrow 95n - n^2 > 0 \Rightarrow n(95 - n) > 0$$

چون $n > 0$ ، پس $95 - n > 0$ ، در نتیجه $n < 95$ ، یعنی $n \leq 94$ ، بنابراین ۹۴ جمله دنباله مثبت هستند.

۴- گزینه ۲ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = -2x^2 + 19x + 1$ به ازای $x = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ به دست می‌آید. چون $\frac{19}{4}$ عددی طبیعی نیست، بزرگترین مقدار در میان a_n ‌ها، a_5 است، که برابر است با $a_5 = -5^2 + 95 + 1 = 46$.



۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < a_n < \frac{11}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} \Rightarrow 9n+18 < 20n-10 \Rightarrow n > \frac{28}{11} \quad (1)$$

$$\frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10} \Rightarrow 20n-10 < 11n+22 \Rightarrow n < \frac{32}{9} \quad (2)$$

تنها عدد طبیعی که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق می‌کند، ۳ است.

۶- گزینه ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_5 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + 4d = 2(a_1 + 4d) \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 = -4d$$

۷- گزینه ۳ چون $a_3 + a_7 = 0$ ، پس $a_3 = -a_7$. بنابراین از رابطه

$$a_7 + a_3 = 128$$

$$a_7 + (-a_3) = 128 \Rightarrow a_7 = 64 \Rightarrow a_3 = \pm 8$$

$$d = \frac{a_7 - a_3}{7-3} = \frac{-8-8}{4} = -4 \quad \text{اگر } a_7 = -8 \text{ و } a_3 = 8$$

$$d = \frac{a_7 - a_3}{7-3} = \frac{8+8}{4} = 4 \quad \text{اگر } a_7 = 8 \text{ و } a_3 = -8$$

۸- گزینه ۳ جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$\log_7 a + \log_7 (16a) = 2 \log_7 (3a+4) \Rightarrow \log_7 (a(16a)) = \log_7 (3a+4)^2$$

$$16a^2 = (3a+4)^2 \Rightarrow 16a^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$7a^2 - 24a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4, a = -\frac{4}{7} \quad (\text{غ.ق.})$$

۹- گزینه ۳ جمله‌های اول و دوم دنباله $a_n = 2 - 3n$ به ترتیب برابر

-۱ و -۴ است. پس قدرنسبت آن برابر -۳ است. اگر جمله اول را ۴ واحد

کاهش دهیم، به -۵ تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد افزایش دهیم،

به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنباله حسابی $1, -2, -5, \dots$ را داریم که جمله

عمومی آن به صورت $a_n = 3n - 8$ است. پس جمله بیست و یکم دنباله جدید

$$a_{21} = 55 \text{ است.}$$

۱۰- گزینه ۴ بنابر فرض مسئله،

$$a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} = 10$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 10d + a_1 + 14d = 10$$

$$4a_1 + 34d = 10 \Rightarrow 2a_1 + 17d = 5$$

بنابراین

$$a_1 + a_1 + 17d = 5 \Rightarrow a_1 + a_{17} = 5$$

۱۱- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 6 - \sqrt{2} + 6 + \sqrt{2} = 12$$

چون $a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$ ، پس

$$3(a_1 + a_n) = 12 \Rightarrow a_1 + a_n = 4$$

۱۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$2x = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$x + y = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۱۳- گزینه ۴ چون $a_1 = \frac{1}{r}$ و $r = 2$ ، حاصل ضرب پانزده جمله اول

برابر است با

$$P = a_1 \times a_1 r \times \dots \times a_1 r^{14} = a_1^{15} \times r^{1+2+\dots+14}$$

$$= a_1^{15} r^{105} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} (2)^{105} = 2^{90}$$

۱۴- گزینه ۱ اگر قدرنسبت دنباله را با r نشان دهیم، آن‌گاه

$$r^3 = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64 \Rightarrow r = 4$$

در نتیجه $x = \frac{1}{8}$ ، $y = 2$ و $z = 8$. بنابراین $xyz = 2$.

۱۵- گزینه ۴ هر سه عدد باید برابر باشند. در نتیجه

$$y - 9 = 2x + 3 = 3x - 1$$

بنابراین $x = 4$ و $y = 20$ ، پس $x + y = 24$.

۱۶- گزینه ۱ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی سطر B برابر d

باشد. در این صورت

$$4 + 4d = 20 \Rightarrow d = 4$$

بنابراین $b = 20 + 4 = 24$. در سطر B، جمله کنار جمله نخست برابر ۸ است.

اگر قدرنسبت دنباله هندسی ستون A برابر r باشد، آن‌گاه

$$8 = 0.125r^3 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4$$

بنابراین $a = 8 \times 4 = 32$. به این ترتیب $a + b = 56$.

۱۷- گزینه ۳ توجه کنید که $y = rx$ ، $z = r^2x$ و $t = r^3x$ که r

قدرنسبت دنباله است. پس

$$x + z = 20 \Rightarrow x + r^2x = 20 \Rightarrow x(1 + r^2) = 20 \quad (1)$$

$$y + t = 60 \Rightarrow rx + r^3x = 60 \Rightarrow rx(1 + r^2) = 60 \quad (2)$$

از تقسیم طرفین تساوی (۲) بر طرفین تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{rx(1+r^2)}{x(1+r^2)} = \frac{60}{20} \Rightarrow r = 3$$

۱۸- گزینه ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جمله اول آن a_1

باشد، آن گاه

$$a_5 - a_3 = 96 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 r^2 = 96 \Rightarrow a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96$$

$$a_8 - a_6 = 12 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^5 = 12 \Rightarrow a_1 r^5 (r^2 - 1) = 12$$

طرفین تساوی‌های بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^5 (r^2 - 1)}{a_1 r^2 (r^2 - 1)} = \frac{12}{96} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس

$$a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 96 \Rightarrow a_1 = -512$$

$$\text{بنابراین } a_5 = a_1 r^4 = -512 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -32$$

۱۹- گزینه ۲ اگر قدرنسبت دنباله r را بنامیم، آن گاه $b = ra$ و

$c = r^2 a$ ، در نتیجه

$$a + b + c = kb \Rightarrow a + ra + r^2 a = kra$$

چون دنباله ثابت نیست، پس $a \neq 0$ و در نتیجه

$$1 + r + r^2 = kr \Rightarrow r^2 + (1-k)r + 1 = 0$$

برای اینکه معادله فوق جواب داشته باشد، باید $\Delta \geq 0$ ، پس

$$(1-k)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (1-k)^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1-k \geq 2 \Rightarrow k \leq -1 \\ \text{یا} \\ 1-k \leq -2 \Rightarrow k \geq 3 \end{cases}$$

اگر $k = 3$ ، آن گاه $r = 1$ و در نتیجه دنباله ثابت است. پس

$$k \in (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$$

۲۰- گزینه ۱ فرض کنید قدرنسبت دنباله هندسی r و جمله اول آن

a_1 باشد. در این صورت جمله‌های اول، دوم و چهارم آن به ترتیب a_1 ، $a_1 r$ و

$a_1 r^3$ باشند. چون این اعداد جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی هستند، پس

$$2a_1 r = a_1 + a_1 r^3 \Rightarrow r^3 + 1 = 2r \Rightarrow r^3 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 + r - 1) = 0$$

چون دنباله هندسی غیرثابت است، پس $r \neq 1$ ، در نتیجه

$$r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

توجه کنید که قدرنسبت دنباله هندسی عددی مثبت است، پس $r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

قابل قبول نیست.