## درس اوّل: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

**یادآوری** اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشند:

$$\underbrace{a_۱}_{\text{جملهٔ اول}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_۱+d}_{\text{جملهٔ دوم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_۱+۲d}_{\text{جملهٔ سوم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_۱+۳d}_{\text{جملهٔ چهارم}}, \cdots$$

**نکات** در هر دنبالهٔ حسابی نکات زیر برقرار می‌باشد:

۱) جملهٔ n اُم به صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ یا $a_n=a_m+(n-m)d$ می‌باشد. به عنوان مثال $a_{۱۴}=a_۱+۱۳d$ ، $a_{۱۴}=a_۶+۸d$ و $a_{۱۴}=a_۲+۱۲d$ می‌باشد.

۲) قدرنسبت دنباله را می‌توان از رابطه‌های $d=a_n-a_{n-۱}$ و $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ به دست آورد.

۳) جملهٔ n اُم، عبارتی درجه یک بر حسب n است که در آن ضریب n ، همان قدر نسبت دنباله (d) می‌باشد. به عنوان مثال $a_n=۵-۳n$ و $b_n=\frac{n}{۲}+۱$ جملات n اُم (یا عمومی) دو دنبالهٔ حسابی هستند که قدرنسبت آن‌ها به ترتیب $-۳$ و $\frac{۱}{۲}$ است، ولی $c_n=۳n^۲+۵$ نمی‌تواند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد چون درجهٔ یک نیست.

۴) اگر $d>۰$ ، آن‌گاه دنباله صعودی و اگر $d<۰$ ، آن‌گاه دنباله نزولی می‌باشد.

۵) اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی یا متساوی‌الفاصله از یک دنبالهٔ حسابی (عددی) باشند، آن‌گاه $۲b=a+c$ ، یعنی دو برابر جملهٔ وسط، برابر است با مجموع دو جملهٔ دیگر، در این صورت b را واسطهٔ حسابی (یا عددی) بین a و c می‌نامند.

**تست آموزشی**

جملهٔ سوم یک دنبالهٔ حسابی ۷ و قدرنسبت آن ۲ می‌باشد. جملهٔ عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $a_n=۳n-۲$  ۲) $a_n=۲n+۱$

۳) $a_n=n+۴$  ۴) $a_n=۲n+۵$

**پاسخ** گزینهٔ «۲»؛ روش اول: جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی برابر $a_n=a_۱+(n-۱)d$ می‌باشد. $a_۳=۷$ و $d=۲$ ، بنابراین داریم:

$$a_۳=۷\Rightarrow a_۱+۲d=۷\Rightarrow a_۱+۲\times۲=۷\Rightarrow a_۱=۳\Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۳+(n-۱)\times۲\Rightarrow a_n=۲n+۱$$

روش دوم: چون قدرنسبت دنباله برابر ۲ می‌باشد، پس $a_n=۲n+$ .... حال برای تعیین ....، چون $a_۳=۷$ ، پس در جملهٔ عمومی، اگر $n=۳$ را جایگذاری کنیم، حاصل باید ۷ شود. بنابراین $=۱$ .... و در نتیجه $a_n=۲n+۱$ می‌باشد.

**۱** در یک دنبالهٔ حسابی $۲a_۴+۳a_۷-a_۹=۲۰$ است، جملهٔ پنجم این دنباله، کدام است؟

۱) ۲۰  ۲) ۱۰  ۳) ۵  ۴) ۴

گزینهٔ «۳»

**پاسخ:** با استفاده از رابطهٔ $a_n=a_۱+(n-۱)d$ ، کافی است جملات را برحسب $a_۱$ و d بنویسیم:

$$۲(a_۱+۳d)+۳(a_۱+۶d)-(a_۱+۸d)=۲۰\Rightarrow ۲a_۱+۶d+۳a_۱+۱۸d-a_۱-۸d=۲۰\Rightarrow ۴a_۱+۱۶d=۲۰\xrightarrow{\div۴}\underbrace{a_۱+۴d}_{a_۵}=۵\Rightarrow a_۵=۵$$

**۲** در یک دنبالهٔ حسابی، جملات چهارم و هفدهم به ترتیب ۷ و ۱۳− می‌باشند. جملهٔ سی‌ام این دنباله کدام است؟

۱) ۳۳  ۲) $-۳۳$  ۳) $\frac{۲۰}{۱۳}$  ۴) $-\frac{۲۰}{۱۳}$

گزینهٔ «۲»

**پاسخ:**

روش اول: با استفاده از رابطهٔ $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ قدر نسبت را پیدا می‌کنیم:

$$a_۴=۷ \text{ و } a_{۱۷}=-۱۳\Rightarrow d=\frac{a_{۱۷}-a_۴}{۱۷-۴}=\frac{-۱۳-۷}{۱۳}=-\frac{۲۰}{۱۳}$$

$$a_۴=a_۱+۳d\Rightarrow ۷=a_۱+۳\times(-\frac{۲۰}{۱۳})\Rightarrow a_۱=\frac{۱۵۱}{۱۳}\Rightarrow a_{۳۰}=a_۱+۲۹d=\frac{۱۵۱}{۱۳}+۲۹\times(-\frac{۲۰}{۱۳})=-\frac{۴۲۹}{۱۳}=-۳۳$$

روش دوم: می‌توانیم از رابطهٔ $a_n=a_m+(n-m)d$ استفاده کنیم:

$$a_{۱۷}=a_۴+۱۳d\Rightarrow -۱۳=۷+۱۳d\Rightarrow d=-\frac{۲۰}{۱۳}\Rightarrow a_{۳۰}=a_{۱۷}+۱۳d=-۱۳+۱۳\times(-\frac{۲۰}{۱۳})=-۱۳-۲۰=-۳۳$$

**۳** دنبالهٔ $\cdots ,-129,-141,-153$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) بی‌شمار

«گزینهٔ ۲»

**پاسخ:** جملات فوق یک دنبالهٔ حسابی هستند (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$d=a_2-a_1=-141-(-153)=12\ ,\ a_1=-153\Rightarrow a_n=-153+(n-1)12\Rightarrow a_n=12n-165\xrightarrow{a_n<0}12n-165<0\Rightarrow n<\frac{165}{12}$$

$\Rightarrow n<13/75\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n=1,2,\dots,13\Rightarrow$ ۱۳ جملهٔ منفی دارد.

**۴** شمعی به طول ۲۰ سانتی‌متر پس از روشن شدن، در هر ۳ دقیقه ۲/۳ میلی‌متر کوتاه می‌شود. در چندمین دقیقه، طول شمع به ۱۵/۴ سانتی‌متر می‌رسد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۶۰ ۴) ۶۳

«گزینهٔ ۳»

**پاسخ:** بعد از ۳ دقیقه ۲/۳ میلی‌متر از طول شمع کاسته می‌شود، پس طول شمع تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲۰cm و قدرنسبت ۲/۳mm− می‌دهد.

$a_1=20cm=200mm$ ، $d=-2/3mm$ و $a_n=15/4cm=154mm$

$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow 154=200+(n-1)\times(-2/3)\Rightarrow n=\frac{46}{2/3}+1=21\Rightarrow$ زمان مورد نیاز $=(21-1)\times 3=60$ دقیقه

یعنی پس از گذشت ۶۰ دقیقه طول شمع به ۱۵/۴ سانتی‌متر می‌رسد. (توجه کنید که برای $a_1=20cm$ هنوز زمانی سپری نشده است و پس از گذشت ۳ دقیقه اول طول شمع به $a_2$ می‌رسد و ...)

## تعیین تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی

اگر a و b به ترتیب جملات اول و آخر یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشند، آن‌گاه تعداد جملات این دنباله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n=\frac{b-a}{d}+1$$

**۵** چند عدد سه رقمی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۱۳ وجود دارد؟

۱) ۷۹ ۲) ۷۸ ۳) ۶۸ ۴) ۶۹

«گزینهٔ ۴»

**پاسخ:** اولین عدد سه رقمی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۱۳، عدد ۱۰۴ و آخرین آن‌ها ۹۸۸ می‌باشد، پس اعداد سه‌رقمی طبیعی بخش‌پذیر بر ۱۳، یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۱۳ و جملهٔ اول ۱۰۴ و جملهٔ آخر ۹۸۸ تشکیل می‌دهند، بنابراین تعداد آن‌ها برابر است با:

$$n=\frac{988-104}{13}+1=68+1=69$$

## درج n واسطهٔ حسابی بین دو عدد

برای درج n واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b ، می‌توان قدرنسبت دنبالهٔ حاصل را از رابطهٔ مقابل به‌دست آورد:

$$d=\frac{b-a}{n+1}$$

**توجه** با استفاده از رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ نیز می‌توان مسائل مربوط به واسطه‌های حسابی را حل کرد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ، ۵ واسطهٔ حسابی درج کنیم، آن‌گاه a را جملهٔ اول و b را جملهٔ هفتم در نظر می‌گیریم و از رابطهٔ $\underbrace{a_7}_{b}=\underbrace{a_1}_{a}+6d$ می‌توان d را محاسبه می‌کنیم.

**۶** بین دو عدد ۳ و ۶۵، هفده واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. مجموع ۳ واسطهٔ وسط کدام است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۶۸ ۳) ۳۴ ۴) ۱۳۶

«گزینهٔ ۱»

**پاسخ:** روش اول: $a=3$ ، $b=65$ و $n=17$ ، بنابراین با استفاده از رابطهٔ $d=\frac{b-a}{n+1}$ داریم:

$$d=\frac{b-a}{n+1}=\frac{65-3}{17+1}=\frac{31}{9}$$

در مجموع ۱۹ جمله داریم، پس جملهٔ وسط، جملهٔ دهم است، در نتیجه:

$$\text{مجموع سه واسطهٔ وسط}=a_9+a_{10}+a_{11}=(a+8d)+(a+9d)+(a+10d)=3a+27d=3\times3+27\times\frac{31}{9}=9+93=102$$

روش دوم: می‌دانیم جملهٔ وسط، دو برابر مجموع جملات طرفین است، پس:

$$2a_{10}=a+b\Rightarrow 2a_{10}=3+65\Rightarrow a_{10}=34$$

$$\text{مجموع سه واسطهٔ وسط}=\underbrace{a_9+a_{10}+a_{11}}_{2a_{10}}=a_{10}+2a_{10}=3a_{10}=3\times34=102$$

**۷۳** به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) $m<-2$ یا $m>1$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

گزینهٔ «۱»

**پاسخ:** باید علامت ریشه‌ها متفاوت باشد، یعنی $\frac{c}{a}<0$ که در این صورت $\Delta>0$ می‌باشد.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{1-m}{m+2}<0\Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>1$$

**۷۴** به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است؟ (ریاضی داخل ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

گزینهٔ «۴»

**پاسخ:** برای اینکه معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ مثبت داشته باشد، باید $\Delta>0$ و حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌ها نیز مثبت باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P=\dfrac{14-a}{1}>0\Rightarrow a<14 \quad (1)\\ S=\dfrac{2a-4}{1}>0\Rightarrow a>2 \quad (2)\\ \Delta=4(a-2)^2-4(14-a)>0\Rightarrow 4(a^2-4a+4-14+a)>0\\ \Rightarrow 4(a^2-3a-10)>0\Rightarrow (a-5)(a+2)>0\Rightarrow a<-2 \text{ یا } a>5 \quad (3)\end{cases}\Rightarrow (1)\cap(2)\cap(3): 5<a<14$$

**۷۵** اگر معادلهٔ $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

گزینهٔ «۲»

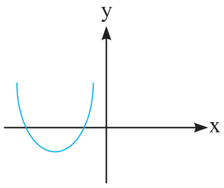
**پاسخ:** با تغییر متغیر $x^2=t$ به یک معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم. معادلهٔ درجه دوم حاصل باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد تا معادلهٔ درجهٔ چهارم، چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

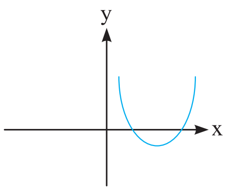
$$x^2=t\Rightarrow t^2-(m+2)t+m+5=0\Rightarrow\begin{cases}\text{ضرب ریشه‌ها}=t_1t_2=\dfrac{c}{a}>0\Rightarrow m+5>0\Rightarrow m>-5 \quad (I)\\ \text{جمع ریشه‌ها}=t_1+t_2=\dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow m+2>0\Rightarrow m>-2 \quad (II)\\ \Delta=(m+2)^2-4(m+5)>0\Rightarrow m^2-16>0\Rightarrow m>4 \text{ یا } m<-4 \quad (III)\end{cases}\Rightarrow (I)\cap(II)\cap(III)=\{m>4\}$$

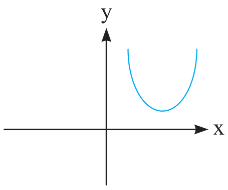
**یادآوری**

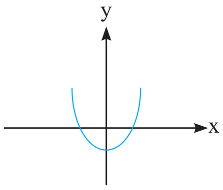
اگر بخواهیم معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد، باید $\Delta>0$ ، $S=\frac{-b}{a}>0$ و $P=\frac{c}{a}>0$ باشند.

**۷۶** در کدام‌یک از نمودارهای زیر، $\Delta>0$ ، $P>0$ و $S<0$ می‌باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 


گزینهٔ «۱»

**پاسخ:** $\Delta>0$ یعنی معادله دو ریشه دارد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است. از طرفی ضرب ریشه‌ها مثبت است، پس هر دو ریشه مثبت یا هر دو منفی‌اند، بنابراین گزینهٔ (۴) حذف می‌شود. اما مجموع ریشه‌ها منفی است، در نتیجه هر دو ریشه منفی‌اند و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

## تعیین معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌ها

الف) اگر یکی از ریشه‌ها معلوم باشد، کافی است آن را به توان دو برسانیم.

**مثال آموزشی**

معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $5+\sqrt{3}$ باشد.

**پاسخ**

$$x=5+\sqrt{3}\Rightarrow x-5=\sqrt{3}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(x-5)^2=(\sqrt{3})^2\Rightarrow x^2-10x+22=0$$

ب) اگر هر دو ریشهٔ معادله ($\alpha$ و $\beta$) معلوم باشند، ابتدا $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ را به‌دست می‌آوریم و از رابطهٔ $x^2-Sx+P=0$ ، معادلهٔ درجه دوم را می‌نویسیم. در ضمن می‌توانیم معادله را به‌صورت $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ بنویسیم.

## ویژگی‌های قدرمطلق

اگر u، v و a سه عدد حقیقی باشند، روابط زیر همواره برقرار است:

۱) $u=v \Rightarrow |u|=|v|$

۲) $|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v$

۳) $|a|=|-a| \Rightarrow |u-v|=|v-u|$

۴) $|u\cdot v|=|u|\cdot|v|$

۵) $\left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|}$ $(v\neq ۰)$

۶) $|u+v|\leq|u|+|v|$ (نامساوی مثلث)

۷) $|u-v|\geq|u|-|v|$

۸) $|u-v|\leq|u|+|v|$

۹) $\big||u|-|v|\big|\leq|u-v|$

۱۰) $\sqrt{u^۲}=|u|$ ; $|u|^۲=u^۲$

۱۱) $|u|=a \Leftrightarrow u=\pm a$ ; $a>۰$

۱۲) $|u|<a \Leftrightarrow -a<u<a$ ; $a>۰$

۱۳) $|u|>a \Leftrightarrow u<-a$ یا $u>a$ ; $a>۰$

**۱۱۶** اگر x عددی حقیقی باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $|x-۱|-|۲x+۳|\geq|۳x+۲|$

۲) $|x-۱|-|۲x+۳|\geq|x+۴|$

۳) $|x-۱|+|۲x+۳|\geq|x+۴|$

۴) $|x-۱|+|۲x+۳|\geq|۳x-۴|$

**پاسخ:** **روش اول:** فرض کنیم $u=x-۱$ و $v=۲x+۳$، می‌دانیم $|u|-|v|\leq|u+v|$ پس گزینهٔ (۱) نادرست است. همچنین $|u|-|v|\leq|u-v|$، درنتیجه گزینهٔ (۲) نادرست است. از طرفی $|u|+|v|\geq|u-v|$ پس گزینهٔ (۳) درست است. دقت کنید که گزینهٔ (۴) به ازای $x=-۱$ نادرست است.

**روش دوم:** با استفاده از عددگذاری، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم. گزینه‌های (۱) و (۲) به ازای $x=۰$ برقرار نیستند و گزینهٔ (۴) به ازای $x=-۱$ نادرست است، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

**۱۱۷** مجموعه جواب نامعادلهٔ $\big||x-۱|-۲\big|<۳$ شامل چند عدد صحیح است؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

**پاسخ:** می‌دانیم اگر $a>۰$، آن‌گاه $|u|<a \Leftrightarrow -a<u<a$، بنابراین داریم:

$$\big||x-۱|-۲\big|<۳ \Rightarrow -۳<|x-۱|-۲<۳ \xRightarrow{+۲} -۱<|x-۱|<۵ \Rightarrow \begin{cases} |x-۱|>-۱ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \\ |x-۱|<۵ \Rightarrow -۵<x-۱<۵ \xRightarrow{+۱} -۴<x<۶ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح}=۶-(-۴)-۱=۹ \end{cases}$$

**۱۱۸** مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲+|x^۲-۳|=۳$ به صورت بازهٔ $[a,b]$ است، $b-a$ کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:**

$$x^۲+|x^۲-۳|=۳ \Rightarrow |x^۲-۳|=۳-x^۲ \Rightarrow |x^۲-۳|=-(x^۲-۳)$$

می‌دانیم اگر $|u|=-u$ آن‌گاه $u\leq ۰$، بنابراین داریم:

$$x^۲-۳\leq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۳ \Rightarrow -\sqrt{۳}\leq x\leq\sqrt{۳} \Rightarrow a=-\sqrt{۳}, b=\sqrt{۳} \Rightarrow b-a=\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}$$

## معادلات و نامعادلات قدر مطلق

روش کلی برای حل معادله یا نامعادلهٔ قدرمطلقی، آن است که عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و با در نظر گرفتن علامتِ آن در محدوده‌های مختلف، قدرمطلق را برداشته و معادلهٔ حاصل را ساده و در نهایت حل کنیم. دقت کنید که جواب‌هایی قابل قبول هستند که در شرایط اولیه (محدودهٔ تعیین علامت) قرار داشته باشند.

**نکات**

۱) برای حل معادلهٔ $|f(x)|=|g(x)|$، کافی است جواب‌های دو معادلهٔ $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ را به‌دست آوریم.

۲) برای حل نامعادلهٔ $|f(x)|<|g(x)|$، می‌توان طرفین نامعادله را به توان ۲ رساند و سپس نامعادلهٔ $f^۲(x)<g^۲(x)$ را حل کرد.

**تست آموزشی**

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $|۲x^۲-۳x+۱|=|x^۲+x-۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

**پاسخ** گزینهٔ «۲»

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ۲x^۲-۳x+۱=x^۲+x-۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \xRightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} x_۱=۱, x_۲=\frac{c}{a}=۳$$

$$f(x)=-g(x) \Rightarrow ۲x^۲-۳x+۱=-x^۲-x+۲ \Rightarrow ۳x^۲-۲x-۱=۰ \xRightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} x_۳=۱, x_۴=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\text{مجموع ریشه‌های معادلهٔ قدر مطلق}=x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱+۳+۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

**۴** در تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\cdot b^x\ ;\ b>0$ داریم $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$، مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۱)

گزینهٔ «۳»

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

**پاسخ:**

$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow f(0)=a\cdot b^0=a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=a\cdot b^{-2}\Rightarrow \frac{3}{2}\times b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow b^{-2}=\frac{1}{16}\Rightarrow \frac{1}{b^2}=\frac{1}{16}\Rightarrow b^2=16\Rightarrow b=\pm 4\xrightarrow{b>0} b=4$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x\Rightarrow f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\sqrt{4^3}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

**نکته** اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد، آن‌گاه $n^m$ تابع مختلف از A به B می‌توان تعریف کرد.

**۵** از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{d,e\}$، چند تابع وجود دارد؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

**پاسخ:** به ازای هر عضو از مجموعهٔ A، دو انتخاب از مجموعهٔ B وجود دارد، پس تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر با $2\times2\times2=8$ است.

## تساوی دو تابع

توابع f و g مساوی هستند هرگاه:

الف) $D_f=D_g$ ب) به ازای هر x از دامنهٔ فوق داشته باشیم $f(x)=g(x)$

به عبارت دیگر دو تابع f و g مساوی هستند، هرگاه قبل از ساده کردن، دامنهٔ یکسان و بعد از ساده کردن، ضابطهٔ یکسان داشته باشند. به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ و $g(x)=1$ با هم برابرند زیرا اولاً $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و ثانیاً به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $\sin^2x+\cos^2x=1$ یعنی $f(x)=g(x)$، بنابراین f و g با هم برابرند.

**توجه** هنگامی که دو تابع با هم مساوی باشند، نمودارهای آن‌ها کاملاً بر هم منطبق است.

**مثال آموزشی**

آیا توابع $f(x)=\frac{x-2}{x-2}$ و $g(x)=1$ با هم برابرند؟

**پاسخ** خیر، زیرا دامنهٔ آن‌ها با هم مساوی نیست. $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ و $D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

**۶** کدام گزینه، نادرست است؟

گزینهٔ «۴»

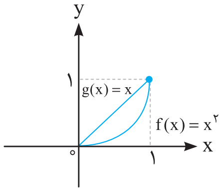
۱) بُرد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

۲) بی‌شمار تابع با دامنهٔ $(-1,1)$ وجود دارد.

۳) برد تابع، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع است.

۴) اگر دامنهٔ دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها هم برابر باشند، دو تابع برابرند.

**پاسخ:** به عنوان مثال نقض گزینهٔ (۴)، نمودار دو تابع f و g با دامنه و برد یکسان رسم شده است ولی دو تابع برابر نیستند.




**۷** برای تابع $\begin{cases} f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^2\end{cases}$، کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول نیست؟

گزینهٔ «۴»

۱) $\begin{cases} f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to[0,\frac{1}{4}]\\ f(x)=x^2\end{cases}$

۲) $\begin{cases} f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to[0,+\infty)\\ f(x)=x^2\end{cases}$

۳) $\begin{cases} f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to[0,+\infty)\\ f(x)=x\sqrt[3]{x^3}\end{cases}$

۴) $\begin{cases} f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}\\ f(x)=x\sqrt{x^2}\end{cases}$

**پاسخ:** در واقع باید تابعی را انتخاب کنیم که با تابع داده شده مساوی نباشد. در گزینهٔ (۴) داریم:

$$f(x)=x\sqrt{x^2}=x|x|=\begin{cases} x^2\ ;\ x\geq 0\\ -x^2\ ;\ x<0\end{cases}$$

پس برای x های منفی، گزینهٔ (۴) با تابع داده شده مساوی نیست.

دقت کنید که هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. در تابع $f(x)=x^2$، اگر $D_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ باشد، آن‌گاه $R_f=[0,\frac{1}{4}]$ است. بنابراین هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه‌ای شامل بازهٔ $[0,\frac{1}{4}]$ نیز در نظر گرفت. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نمایش‌های دیگری از تابع داده شده هستند. در گزینهٔ (۳) نیز $f(x)=x\sqrt[3]{x^3}=xx=x^2$ می‌باشد.

**توجه** برای انجام اعمال جبری روی توابعی که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب می‌باشند، کافی است مولفه‌های اول مشترک زوج‌های مرتب را در نظر بگیریم و عملیات موردنظر را بر روی مولفه‌های دوم این زوج مرتب‌ها انجام دهیم . در مورد تقسیم، اگر مخرج کسر در مولفه دوم صفر شود، آن زوج مرتب را حذف می‌کنیم.

**مثال آموزشی**

توابع $f=\{(1,2),(-1,0),(3,-1),(0,3),(2,4)\}$ و $g=\{(1,1),(0,-1),(3,0),(5,3)\}$ مفروض‌اند. توابع $-3f$ ، $g^2$ ، $f+g$ ، $f\cdot g$ ، $\frac{1}{f}$ و $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید.

**پاسخ** برای به دست آوردن تابع $-3f$ ، طول نقاط تابع f را تغییر نمی‌دهیم ولی عرض آن‌ها را در ۳- ضرب می‌کنیم:

$$D_{-3f}=D_f=\{1,-1,3,0,2\}\Rightarrow -3f=\{(1,-6),(-1,0),(3,3),(0,-9),(2,-12)\}$$

برای تعیین تابع $g^2$ کافی است عرض نقاط تابع g را به توان ۲ برسانیم:

$$D_{g^2}=D_g=\{1,0,3,5\}\Rightarrow g^2=\{(1,1),(0,1),(3,0),(5,9)\}$$

برای تعیین $f+g$ کافی است عرض نقاطی که طول‌های مساوی دارند را با هم جمع کنیم:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{0,1,3\}\Rightarrow f+g=\{(0,3-1),(1,2+1),(3,-1+0)\}=\{(0,2),(1,3),(3,-1)\}$$

برای تعیین $f\cdot g$ کافی است عرض نقاطی از f و g که طول‌های مساوی دارند را در هم ضرب کنیم:

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\{1,3,0\}\Rightarrow f\cdot g=\{(1,2),(3,0),(0,-3)\}$$

برای تعیین تابع $\frac{1}{f}$ ، کافی است عرض نقاط متعلق به دامنهٔ f (جز $x=-1$ ) را معکوس کنیم:

$$D_{\frac{1}{f}}=D_f-\{x\mid f(x)=0\}=\{1,-1,3,0,2\}-\{-1\}=\{1,3,0,2\}\Rightarrow \frac{1}{f}=\{(1,\frac{1}{2}),(3,-1),(0,\frac{1}{3}),(2,\frac{1}{4})\}$$

برای تعیین تابع $\frac{1}{f}$ ، کافی است عرض نقاطی از f و g که طول‌های مساوی دارند را بر هم تقسیم کنیم (به غیر از نقاطی از g که به‌ازای آن‌ها $g=0$ می‌باشد):

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\{1,3,0\}-\{3\}=\{1,0\}\Rightarrow \frac{f}{g}=\{(1,\frac{2}{1}),(0,\frac{3}{-1})\}=\{(1,2),(0,-3)\}$$

**۹۱** اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

گزینهٔ «۲»

**پاسخ:** $(2f-g)(3)=2f(3)-g(3)=2\sqrt{3+1}-\frac{3+1}{3-2}=4-4=0$

**۹۲** اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ و $g=\{(1,5),(2,6),(3,0)\}$ ، آن‌گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{(2,\frac{2}{3})\}$　　۲) $\{(1,\frac{4}{5}),(3,1)\}$　　۳) $\{(1,\frac{4}{5}),(2,\frac{1}{2})\}$　　۴) $\{(2,1),(1,\frac{4}{5})\}$

گزینهٔ «۴»

**پاسخ:** ابتدا دامنهٔ $\frac{2f}{g}$ را تعیین می‌کنیم:

$$D_{\frac{2f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\{1,2,3\}-\{3\}=\{1,2\}$$

حال داریم:

$$\left.\begin{aligned}(\frac{2f}{g})(1)&=\frac{2f(1)}{g(1)}=\frac{2\times2}{5}=\frac{4}{5}\\(\frac{2f}{g})(2)&=\frac{2f(2)}{g(2)}=\frac{2\times3}{6}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{2f}{g}=\{(1,\frac{4}{5}),(2,1)\}$$

**۹۳** اگر $f(x)=mx+3$ و $g(x)=(1-2m^2)x-4$ ، به ازای کدام مقدار m ، رابطهٔ $(f^2-g)(-2)=18$ برقرار است؟

۱) $-\frac{1}{4}$　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) $-\frac{1}{2}$

گزینهٔ «۱»

**پاسخ:** ابتدا $f(-2)$ و $g(-2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=mx+3\Rightarrow f(-2)=-2m+3$$

$$g(x)=(1-2m^2)x-4\Rightarrow g(-2)=(1-2m^2)(-2)-4=4m^2-6$$

حال داریم:

$$(f^2-g)(-2)=\left(f(-2)\right)^2-g(-2)=(-2m+3)^2-(4m^2-6)=4m^2-12m+9-4m^2+6=18\Rightarrow-12m=3\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

## جزءِ صحیح لگاریتم اعشاری و تعداد ارقام یک عدد

### جزءِ صحیح لگاریتم اعشاری:

**حالت اول:** اگر $a>۱$، آن‌گاه جزءِ صحیح لگاریتم $a$ در پایهٔ ۱۰ یک واحد از تعداد ارقامِ صحیحِ $a$ کمتر است. به عنوان مثال: $[\log ۹۷۸]=۲$ یا $[\log ۲۴۵۷/۹۲]=۳$

بنابراین اگر $a$ عددی طبیعی باشد و $[\log a]=n$، آن‌گاه $a$ عددی $n+۱$ رقمی است. به عنوان مثال اگر $[\log a]=۱۴$، آن‌گاه $a$ عددی ۱۵ رقمی است.

**حالت دوم:** اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه جزءِ صحیح لگاریتم $a$ در پایهٔ ۱۰ برابر است با قرینهٔ تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز $a$ می‌باشد. به عنوان مثال:

$[\log ۰/۴۰۰۹]=-۱$ یا $[\log ۰/۰۰۰۹۷]=-۴$

بنابراین اگر $[\log a]=-n$ باشد، آن‌گاه تعداد صفرهای بعد از ممیز و پشت سر هم در عدد $a$ برابر است با $n-۱$. به عنوان مثال اگر $[\log a]=-۷$ آن‌گاه عدد $a$ بعد از ممیز و پشت سر هم $۷-۱=۶$ تا صفر دارد.

**تست آموزشی**

مقدار عددی $[\log ۰/۰۰۰۰۳۲]+[\log ۵۷/۳۵۹]$ کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-۶$ ۲) $-۵$ ۳) $-۴$ ۴) $-۳$

**پاسخ** گزینهٔ «۳»؛ عدد ۵۷/۳۵۹ دو رقم صحیح دارد، پس $[\log ۵۷/۳۵۹]=۱$. همچنین عدد ۰/۰۰۰۰۳۲ قبل و بعد از ممیز و پشت سر هم ۵ صفر دارد، پس:

$$[\log ۰/۰۰۰۰۳۲]=-۴-۱=-۵$$

بنابراین:

$$[\log ۵۷/۳۵۹]+[\log ۰/۰۰۰۰۳۲]=۱+(-۵)=-۴$$

**تست آموزشی**

جزءِ صحیح $\log_{۰/۲} ۸۱۵$ کدام است؟

۱) $-۵$ ۲) $-۶$ ۳) $-۴$ ۴) $-۳$

**پاسخ** گزینهٔ «۱»؛

$$۰/۲=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}\ ,\ ۵^۴<۸۱۵<۵^۵\Rightarrow (\frac{۱}{۵})^{-۴}<۸۱۵<(\frac{۱}{۵})^{-۵}\Rightarrow (۰/۲)^{-۴}<۸۱۵<(۰/۲)^{-۵}$$

از طرفین لگاریتم در پایهٔ ۰/۲ می‌گیریم، چون پایهٔ لگاریتم عددی بین صفر و یک است، بنابراین جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \log_{۰/۲}(۰/۲)^{-۵}<\log_{۰/۲}۸۱۵<\log_{۰/۲}(۰/۲)^{-۴}\Rightarrow -۵<\log_{۰/۲}۸۱۵<-۴\Rightarrow [\log_{۰/۲}۸۱۵]=-۵$$

**۹۰** مقدار $[\log_۳ ۱۱۷]$ کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

گزینهٔ «۱»

**پاسخ:** برای تعیین مقدار $[\log_۳ ۱۱۷]$، ابتدا توان‌هایی متوالی طبیعی از عدد ۳ را می‌یابیم که ۱۱۷ بین آن‌ها باشد، سپس از طرفین، لگاریتم در پایهٔ ۳ می‌گیریم.

واضح است که:

$$۸۱<۱۱۷<۲۴۳\Rightarrow ۳^۴<۱۱۷<۳^۵\Rightarrow \log_۳ ۳^۴<\log_۳ ۱۱۷<\log_۳ ۳^۵\Rightarrow ۴<\log_۳ ۱۱۷<۵\Rightarrow [\log_۳ ۱۱۷]=۴$$

**۹۱** مقدار عددی $[\log_{۰/۲۵} ۴۹]+[\log_۲ ۰/۰۰۱]$ کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-۴$ ۲) $-۱۴$ ۳) $-۱۰$ ۴) $-۱۳$

گزینهٔ «۴»

**پاسخ:**

$$۰/۰۰۱=\frac{۱}{۱۰۰۰}\ ,\ ۲^{-۱۰}<\frac{۱}{۱۰۰۰}<۲^{-۹}\Rightarrow \log_۲ ۲^{-۱۰}<\log_۲ ۰/۰۰۱<\log_۲ ۲^{-۹}\Rightarrow -۱۰<\log_۲ ۰/۰۰۱<-۹\Rightarrow [\log_۲ ۰/۰۰۱]=-۱۰$$

$$۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴},(\frac{۱}{۴})^{-۲}<۴۹<(\frac{۱}{۴})^{-۳}\Rightarrow (۰/۲۵)^{-۲}<۴۹<(۰/۲۵)^{-۳}\Rightarrow \log_{۰/۲۵}(۰/۲۵)^{-۳}<\log_{۰/۲۵}۴۹<\log_{۰/۲۵}(۰/۲۵)^{-۲}$$

$$\Rightarrow -۳<\log_{۰/۲۵}۴۹<-۲\Rightarrow [\log_{۰/۲۵}۴۹]=-۳$$

بنابراین:

$$[\log_۲ ۰/۰۰۱]+[\log_{۰/۲۵}۴۹]=-۱۰-۳=-۱۳$$

**۹۲** عدد $۸^{۲۰۰}$ چند رقمی است؟ ($\log ۲\simeq ۰/۳۰۱$)

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۰۱ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۸۱

گزینهٔ «۴»

**پاسخ:**

$$۸=۲^۳\Rightarrow ۸^{۲۰۰}=۲^{۶۰۰}\Rightarrow [\log ۸^{۲۰۰}]=[\log ۲^{۶۰۰}]=[۶۰۰\log ۲]=[۶۰۰\times ۰/۳۰۱]=[۱۸۰/۶]=۱۸۰$$

پس عدد $۸^{۲۰۰}$ دارای $۱۸۰+۱=۱۸۱$ رقم است.

## نسبت‌های مثلثاتی $۲\alpha$ و $۳\alpha$

با استفاده از فرمول‌های بسط مجموع می‌توان روابط پرکاربرد زیر را پیدا کرد:

$$\begin{cases} \sin ۲\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos ۲\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \end{cases}$$

پس به خاطر بسپاریم:

۱) $\sin(۲\alpha) = ۲\sin(\alpha)\cos(\alpha) \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha = \cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \quad \sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}}$

۳) $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$

۴) $\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$

### مثال آموزشی

**به کمک نسبت‌های مثلثاتی $۳\alpha$ حاصل $\cos ۶۷/۵^\circ$ را بیابید.**

**پاسخ**

$\cos ۶۷/۵^\circ = \cos ۳(۲۲/۵^\circ)$

ابتدا به‌کمک رابطهٔ $\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$، مقدار $\cos ۲۲/۵^\circ$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{۱+\cos ۲(۲۲/۵^\circ)}{۲} = \frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \cos ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos ۶۷/۵^\circ = ۴\cos^۳(۲۲/۵^\circ) - ۳\cos(۲۲/۵^\circ) = ۴\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)^۳ - ۳\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right) = ۴\times\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)^۲\cdot\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right) - ۳\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)$$

$$= \cancel{۴}\times\frac{۲+\sqrt{۲}}{\cancel{۴}}\times\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right) - ۳\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}(۲+\sqrt{۲}-۳) = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}(\sqrt{۲}-۱)$$

**۵۳** اگر $\tan ۳\alpha = \sqrt{۵}$ باشد، حاصل $\frac{۱+\cos ۶\alpha}{۱-\cos ۶\alpha}$ برابر با کدام است؟

۱) ۱    ۲) ۵    ۳) $\frac{۱}{۵}$    ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

گزینهٔ «۳»

**پاسخ:** می‌دانیم $۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha$ و $۱-\cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha$، پس:

$$\frac{۱+\cos ۶\alpha}{۱-\cos ۶\alpha} = \frac{۲\cos^۲ ۳\alpha}{۲\sin^۲ ۳\alpha} = \cot^۲ ۳\alpha = \frac{۱}{\tan^۲ ۳\alpha} = \frac{۱}{۵}$$

## روابط تکمیلی $۲\alpha$ و $۳\alpha$

۱) $\cot\alpha + \tan\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$

۲) $\cot\alpha - \tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha$

۳) $\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۴) $\cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۵) $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

۶) $\tan^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}$

۷) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$

۸) $\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$

**۵۴** فرض کنید $\sin\alpha = \frac{۲}{۵}$ و $\alpha$ در ناحیهٔ دوم باشد، آن‌گاه $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲۱}}{۲۱}$    ۲) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲۱}$    ۳) $-\frac{۲\sqrt{۲۱}}{۲۱}$    ۴) $\frac{۲\sqrt{۲۱}}{۲۱}$

گزینهٔ «۳»

**پاسخ:**

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس داریم:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۲}{۵}}{-\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}} = -\frac{۲}{\sqrt{۲۱}} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{۲\sqrt{۲۱}}{۲۱}$$

## معادلات خاص مثلثاتی

در حل معادلات مثلثاتی، حالت‌های خاصی وجود دارد که با دانستن آن‌ها، می‌توان سریع‌تر به جواب رسید. این معادلات خاص و پاسخ‌های آن‌ها عبارتند از ($k \in \mathbb{Z}$):

۱) $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$

۲) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳) $\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۴) $\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۵) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$

۶) $\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$

۷) $\left\{\begin{array}{l}\sin^2 u = \sin^2 v\\ \cos^2 u = \cos^2 v\\ \tan^2 u = \tan^2 v\\ \cot^2 u = \cot^2 v\end{array}\right. \Rightarrow u = k\pi \pm v$

### مثال آموزشی

جواب‌های کلی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $4\sin x.\cos x = 0$

ب) $\cos^2 x + \cos x = 0$

**پاسخ** می‌دانیم $k\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{k}{2}\sin 2\alpha$، پس:

الف) $4\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \frac{4}{2}\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}\\ \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = (2k+1)\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

**۱۲۷** جواب کلی معادلهٔ $\tan(2x+1) = 0$ کدام است؟ «گزینهٔ «۲»»

۱) $\frac{k\pi}{2} - 1$ ۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + 1$ ۴) $\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{2}$

**پاسخ:**

$\tan(2x+1) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x + 1 = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi - 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$

**۱۲۸** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x - 2\sin x + \cos^2 x = 0$ کدام است؟ «گزینهٔ «۳»»

۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

**پاسخ:**

$2\sin^2 x - 2\sin x + \underbrace{1 - \sin^2 x}_{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$

**۱۲۹** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳) «گزینهٔ «۲»»

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

**پاسخ:** می‌دانیم $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$، داریم:

$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x \Rightarrow \sin 3x = 2\sin x\cos x\cos x \Rightarrow \sin 3x = \sin 2x\cos x \Rightarrow \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x$

$\Rightarrow \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = \sin 2x\cos x \Rightarrow \cos 2x\sin x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin x \neq 0 \Rightarrow \text{چون مخرج کسر است}\\ \cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \;;\; k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

**۱۳۰** مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵) «گزینهٔ «۳»»

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

**پاسخ:**

$\sin 4x = \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}\underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x} \Rightarrow \sin 4x = (1)(-\cos 2x) \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0$

## درس دوم: روش‌های محاسبه حد

### محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش به محاسبهٔ حد توابع کسری مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و مخرج آن‌ها در نقطهٔ a ، هر دو برابر صفر است. $\frac{0}{0}$ را حالت مبهم و عمل پیدا کردن حد واقعی تابع را رفع ابهام می‌گویند.

برای رفع ابهام حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از:

۱) قاعدهٔ هوپیتال ۲) هم‌ارزی ۳) حذف عامل صفرکننده

**روش اول:** قاعدهٔ هوپیتال: در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ چنانچه حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ شود و توابع f و g در یک همسایگی محذوف a مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر x از این همسایگی محذوف، $g'(x)\neq 0$ باشد، آن‌گاه برای رفع ابهام، از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xlongequal{\text{قاعده هوپیتال}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجه کنید که قاعدهٔ هوپیتال، محدودیت تکرار ندارد. به‌عبارت دیگر تا وقتی که شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار باشد، می‌توان از آن استفاده کرد. همچنین لازم به ذکر است که معمولاً اگر زیر رادیکال، صفر شود از قاعدهٔ هوپیتال نمی‌توان استفاده کرد. در این حالت برای رفع ابهام از روش حذف عامل صفرکننده استفاده می‌کنیم.

**مثال آموزشی**

**حدهای روبه‌رو را در صورت وجود محاسبه کنید.**

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

**پاسخ**

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\frac{0}{0}\xlongequal{\text{قاعده هوپیتال}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{3x^2}=\frac{-1}{3}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\xlongequal{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}\xlongequal{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}\xlongequal{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

همان‌طور که در مثال آموزشی صفحهٔ قبل دیده شد، قاعدهٔ هوپیتال روشی بسیار سریع برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌باشد امّا در استفاده از آن باید از فرمول‌های مشتق استفاده کرد. بعضی از فرمول‌های مشتق که در هوپیتال کاربرد زیادی دارند در زیر لیست شده‌اند. در فصل‌های بعد هم با فرمول‌های بیشتری آشنا می‌شوید. دقّت کنید که مشتق f را با $f'$ نمایش می‌دهیم.

| ردیف | تابع | مشتق تابع | مثال |
|---|---|---|---|
| ۱ | $y=c$ (ثابت) | $y'=0$ | $y=-2\Rightarrow y'=0$ |
| ۲ | $y=ax^n$ | $y'=nax^{n-1}$ | $y=3x^5\Rightarrow y'=5\times 3x^4=15x^4$ |
| ۳ | $y=f(x)\pm g(x)$ | $y'=f'(x)\pm g'(x)$ | $y=x^4+x^3-x^2\Rightarrow y'=4x^3+3x^2-2x$ |
| ۴ | $y=f(x)\cdot g(x)$ | $y'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$ | $y=(x^3-1)(x^2+5x)\Rightarrow y'=(3x^2)(x^2+5x)+(2x+5)(x^3-1)$ |
| ۵ | $y=au^n$ | $y'=nau'u^{n-1}$ | $y=3(x^2+x-4)^7\Rightarrow y'=7\times 3\times(2x+1)+(x^2+x-4)^6$ |
| ۶ | $y=\sqrt{u}$ | $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ یا $y=\sqrt{3x-1}\Rightarrow y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ |
| ۷ | $y=\sqrt[n]{u}$ | $y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ | $y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ یا $y=\sqrt[3]{3x+2}\Rightarrow y'=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$ |
| ۸ | $y=\sin u$ | $y'=u'\cdot\cos u$ | $y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$ یا $y=\sin 3x\Rightarrow y'=3\cos 3x$ |
| ۹ | $y=\cos u$ | $y'=-u'\cdot\sin u$ | $y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$ یا $y=\cos 5x\Rightarrow y'=-5\sin 5x$ |
| ۱۰ | $y=\tan u$ | $y'=u'(1+\tan^2 u)$ | $y=\tan x\Rightarrow y'=1+\tan^2 x$ یا $y=\tan 7x\Rightarrow y'=7(1+\tan^2 7x)$ |
| ۱۱ | $y=\cot u$ | $y'=-u'(1+\cot^2 u)$ | $y=\cot x\Rightarrow y'=-(1+\cot^2 x)$ یا $y=\cot 3x\Rightarrow y'=-3(1+\cot^2 3x)$ |

**تذکر** قاعدهٔ هوپیتال در کتاب درسی بیان نشده است، در نتیجه از این قاعده در امتحانات تشریحی نمی‌توانید استفاده کنید.

۱۶۷ اگر $f(x)=\begin{cases}[\cot\frac{\pi}{x+3}]+a & x>1\\ 2b+1 & x=1\\ [\log_{\frac{1}{2}} x] & x<1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، $a-4b$ کدام است؟

«گزینهٔ ۳»

۱) صفر ۲) $-3$ ۳) $1$ ۴) $-1$

**پاسخ:**

$$\begin{cases}f(1)=2b+1\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}[\cot\frac{\pi}{x+3}]+a=[\cot\frac{\pi}{4^+}]+a=[\cot(\frac{\pi}{4})^-]+a=[1^+]+a=1+a\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=[\log_{\frac{1}{2}}1^-]=[0^+]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+a=0\Rightarrow a=-1\\ 2b+1=0\Rightarrow b=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow a-4b=-1+2=1$$

حرف آخر همیشه تو کنکور از بحث پیوستگی تست میاد و بیشتر وقتا این تست مربوط به پیوستگی در نقطه هست. بنابراین مثال‌های قبلی رو یه بار دیگه حل کن. به سادگی می‌تونی سؤال مربوط به این بحث رو تو کنکور جواب بدی

## پیوستگی در بازه

۱ **پیوستگی بر بازهٔ $(a,b)$:** تابع f بر بازهٔ باز $(a,b)$ پیوسته است، هرگاه در هر نقطهٔ $(a,b)$ پیوسته باشد.

۲ **پیوستگی بر بازهٔ $[a,b)$:** تابع f بر بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است اگر:

الف بر بازهٔ باز $(a,b)$ پیوسته باشد.

ب در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

۳ **پیوستگی بر بازهٔ $(a,b]$:** تابع f بر بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است اگر:

الف بر بازهٔ باز $(a,b)$ پیوسته باشد.

ب در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

۴ **پیوستگی بر بازهٔ $[a,b]$:** تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است اگر:

الف بر بازهٔ باز $(a,b)$ پیوسته باشد.

ب در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

ج در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

**نکته** تابع $y=[x]$ در نقاطی به طول صحیح ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد) و در سایر نقاط (نقاط غیرصحیح) پیوسته است.

**مثال آموزشی**

پیوستگی $f(x)=[x]$ را در $x=2$ و $x=\sqrt{2}$ بررسی کنید.

**پاسخ** روش اول:

$$x=\sqrt{2}:\begin{cases}f(\sqrt{2})=[\sqrt{2}]=1\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=[\sqrt{2}^+]=1\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=[\sqrt{2}^-]=1\end{cases}\qquad x=2:\begin{cases}f(2)=[2]=2\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=[2^+]=2\\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=[2^-]=1\end{cases}$$

پس تابع در $x=\sqrt{2}$ پیوسته و در $x=2$ ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد).

روش دوم: طبق نکتهٔ ذکر شده، چون $x=2$ عددی صحیح است، پس تابع در این نقطه ناپیوسته و چون $x=\sqrt{2}$ عددی غیرصحیح است، پس تابع در این نقطه پیوسته است.

**نکات**

۱ تابع $y=[mx]$ در نقاطی که $mx$ عددی صحیح شود ناپیوسته است. به عنوان مثال $y=[2x]$ در نقاطی به طول $2x=k\Rightarrow x=\frac{k}{2}=\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\cdots\}$ ناپیوسته است. $(k\in\mathbb{Z})$

۲ تابع با ضابطهٔ $y=[\sqrt{x}]$ در نقاطی به طول $x=k^2(k\in\mathbb{Z})$ یعنی نقاط $x=\{0,1,4,9,\cdots\}$ ناپیوسته است. (فقط پیوستگی راست دارد.)

۳ توابعی به شکل $y=[ax^2+bx+c]$ در نقاطی که داخل جزءصحیح عدد صحیح شود ناپیوسته‌اند، مگر این‌که نقطهٔ داده شده طول min تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد $(x=\frac{-b}{2a})$.

**۷۵** خط به معادلهٔ $y = 3x - 2$ در نقطهٔ $x_0 = 2$ بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

گزینهٔ «۳»

**پاسخ:** چون خط $y = 3x - 2$ در نقطهٔ $x_0 = 2$ بر منحنی $y = f(x)$ مماس است، پس:

$$f(x_0) = 3x_0 - 2 \Rightarrow f(2) = 3(2) - 2 \Rightarrow f(2) = 4 \quad (I)$$

$$f'(x_0) = m_{\text{مماس}} \Rightarrow f'(2) = 3 \quad (II)$$

حال حاصل حد داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)(f(x) - 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(f(x) \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}) = f(2) \times f'(2) \xlongequal{(I),(II)} 4 \times 3 = 12$$

**۷۶** خط به معادلهٔ $y = 3x - 5$ در نقطهٔ $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۴»

**پاسخ:** خط $y = 3x - 5$ در نقطهٔ $x = 2$ بر نمودار $y = g(x)$ مماس است؛ یعنی داریم:

$$y = 3x - 5 \xlongequal{x=2} 3(2) - 5 = 1 \Rightarrow g(2) = 1$$

از طرفی چون این دو نمودار در $x = 2$ بر هم مماس هستند پس در این نقطه شیب‌هایشان هم برابر است یعنی: $g'(2) = 3$

همچنین طبق فرض مسئله داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = \frac{1}{2}f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

در نهایت خواستهٔ مسئله محاسبهٔ $(fog)'(2)$ است، پس می‌توان نوشت:

$$(fog)'(2) = g'(2) \times f'(g(2)) \xlongequal[g'(2)=3]{g(2)=1} g'(2) \times f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

آهنگ تغییر

## درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

**آهنگ متوسط تغییر:** آهنگ متوسط تغییر تابع $f$ در بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[a, a+h]$ به‌صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**آهنگ لحظه‌ای تغییر:** اگر $f$ در نقطهٔ $a$ یا $x_1$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه آهنگ آنی یا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f$ در این نقطه برابر است با:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x = a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x = x_1 = \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$$

در واقع آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع (وتر) و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه، برابر است.

**تست آموزشی**

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع $f$ وقتی $x$ از ۱ به ۴ تغییر می‌کند، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = a + 1$ می‌باشد. $a$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

**پاسخ** گزینهٔ «۱»؛ کافی است مقادیر به‌دست آمده از روابط مربوط به آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f$ را برابر هم قرار دهیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x = a + 1 = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xlongequal{x=a+1} \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{a+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{a+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4} = 1/25$$

**نکته**

۱) برای محاسبهٔ نرخ متوسط باروری و همچنین آهنگ متوسط رشد در مسائل کافیست همان آهنگ متوسط تغییر تابع را حساب کنیم.

۲) در تابع درجه دوم آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[a, b]$ برابر است با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = \frac{a+b}{2}$.

**تست آموزشی**

**< مجموع دو عدد برابر ۸ می‌باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب این دو عدد کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۷ ۴) ۲۴

**پاسخ** گزینهٔ «۲»؛ روش اول: طبق حالات خاص فوق، اگر دو عدد مثبت را x و y فرض کنیم، داریم $x+y=8$، بنابراین حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که هر دو متغیر برابر ۴ $(x=y=4)$ باشند، داریم:

$$x=y=4 \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} x\cdot y=4\times 4=16$$

روش دوم: x و y را دو عدد مثبتی در نظر می‌گیریم که مجموعشان ۸ است و $f(x)$ را تابع حاصل‌ضرب این دو عدد می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} x+y=8 \Rightarrow y=8-x \\ f(x)=x\times y=x(8-x)=-x^2+8x \end{cases}$$

حال باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ را با استفاده از نقاط بحرانی بیابیم، داریم:

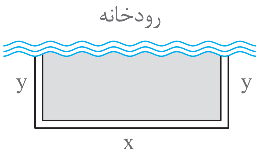
$$\begin{cases} f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=-2x+8=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=4 \Rightarrow \max(f)=4\times 4=16 \\ f'(x)=\text{ناموجود} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

**تست آموزشی**

**< مربع بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیل که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود، چند متر است؟** *(ریاضی خارج ۹۱)*

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

**پاسخ** گزینهٔ «۲»؛ طول مستطیل را x و عرض آن را y می‌گیریم، بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



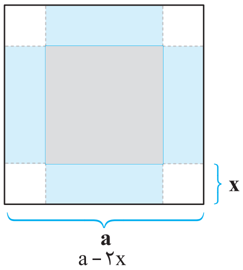

$$S=xy$$

$$\text{رابطهٔ کمکی} = x+2y=88$$

$$\Rightarrow x+2y=88 \xrightarrow{\text{طبق حالات خاص}} x=2y=44 \Rightarrow x=44, y=22 \Rightarrow S_{max}=44\times 22=968$$

**۲۹** **می‌خواهیم از یک قطعه مقوای مربع‌شکل که طول هرضلع آن a سانتی‌متراست، یک جعبهٔ درباز (جعبهٔ شیرینی) بسازیم. مطابق شکل از گوشه‌های آن مربعی به ضلع چند سانتی‌متر ببریم تا حجم جعبه بیشترین مقدار ممکن شود؟ $(a>0)$**

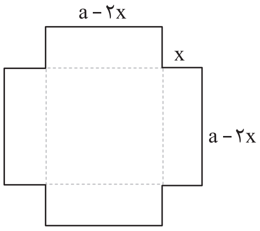
گزینهٔ «۳»




۱) $\frac{a}{4}$ ۲) $\frac{a}{5}$

۳) $\frac{a}{6}$ ۴) $\frac{a}{8}$

**پاسخ:** مطابق شکل پس از برش زدن مقوای مربع‌شکل، یک مکعب مستطیل (جعبهٔ درباز) با اضلاع $(a-2x)$، $(a-2x)$ و x خواهیم داشت، بنابراین حجم مکعب مستطیل (جعبه) برابر با $V(x)=x(a-2x)^2$ است، حال باید ماکزیمم تابع V را با استفاده از نقاط بحرانی، بیابیم:




$$V'=0 \Rightarrow V'=(a-2x)^2-4x(a-2x)=0 \Rightarrow (a-2x)(a-6x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ x=\frac{a}{6} \end{cases}$$

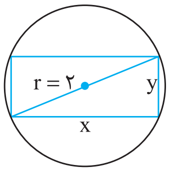
با توجه به گزینه‌ها، $x=\frac{a}{6}$ قابل قبول می‌باشد. توجه کنید که به‌ازای $x=\frac{a}{2}$ حجم جعبه min می‌شود. (چرا؟)

**۳۰** **مساحت بزرگ‌ترین مستطیل محاطی که درون دایره‌ای به شعاع ۲ متر قرار می‌گیرد، کدام است؟**

گزینهٔ «۱»

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

**پاسخ:** با توجه به شکل مقابل و رابطهٔ فیثاغورس داریم:




$$x^2+y^2=16$$

حال می‌خواهیم مساحت مستطیل max شود، داریم:

$$S=xy=x\sqrt{16-x^2} \Rightarrow S'=\sqrt{16-x^2}+\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}(x) \Rightarrow S'=\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Rightarrow 16-2x^2=0$$

$$\Rightarrow 2x^2=16 \Rightarrow x=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow S=x\sqrt{16-x^2}=8$$

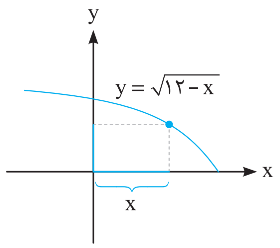
$$S'(x): \text{ناموجود} \Rightarrow \sqrt{16-x^2}=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

توضیح بیشتر: به ازای $x=4$ مساحت مستطیل صفر می‌شود (مستطیل تشکیل نمی‌شود) و می‌دانیم که $x=-4$ نمی‌تواند طول یک مستطیل باشد.

**۳۵** بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ *(تجربی داخل ۹۸)*

گزینهٔ «۳»

۱) $۸\sqrt{۲}$  ۲) $۸\sqrt{۳}$  ۳) ۱۶  ۴) ۱۸




**پاسخ:** مطابق شکل، مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$ است، از رابطهٔ $S=x\sqrt{۱۲-x}$ به‌دست می‌آید. حالا برای پیدا کردن بیشترین مساحت ممکن، باید مقادیر S را در نقاط بحرانی آن بیابیم. داریم:

$$S'=\sqrt{۱۲-x}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}}\times x=\frac{۲(۱۲-x)-x}{۲\sqrt{۱۲-x}}=\frac{۲۴-۳x}{۲\sqrt{۱۲-x}}\Rightarrow\begin{cases}۲۴-۳x=۰\Rightarrow x=۸\\ ۲\sqrt{۱۲-x}=۰\Rightarrow x=۱۲\end{cases}$$

ودر نهایت بیشترین مقدار مساحت به‌ازای یکی از مقادیر x به‌دست می‌آید. داریم:

$$S=x\sqrt{۱۲-x}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۲:S=۰\\ x=۸:S=۸\sqrt{۱۲-۸}=۸\times۲=۱۶\end{cases}$$

**حرف آخر**

*یکی از کاربردهای مهم مشتق تو ریاضیات، فیزیک و علوم مهندسی بحث وزین وشیرینه بهینه‌سازیه!! بنابراین تنوع سؤالات این بحث خیلی زیاده. الگوریتم حل سؤالات بهینه‌سازی تکراریه اما باید خیلی سؤال حل کنی تا بتونی سؤالات بهینه‌سازی آزمون‌های آزمایشی و کنکورهای سراسری رو پاسخ بدی. تو می‌تونی؛ تلاش کن، تلاش، تلاش.*

## تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

**قضیه:** فرض کنیم تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و روی بازهٔ $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به‌ازای هر x متعلق به بازهٔ $(a,b)$، $f'(x)>۰$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به‌ازای هر x عضو بازهٔ $(a,b)$، $f'(x)<۰$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید است.

ج) اگر به‌ازای هر x متعلق به بازهٔ $(a,b)$، $f'(x)=۰$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ یک تابع ثابت است.

**نکته** با توجه به قضیهٔ فوق، اگر f تابعی مشتق‌پذیر (مثل توابع چند جمله‌ای: $y=\sin(ax)$، $y=\cos(ax)$ و ...) باشد، آن‌گاه برای تعیین بازه‌هایی که تابع f در آن‌ها صعودی یا نزولی اکید است، (به بیان دیگر برای تعیین جهت تغییرات f) باید $f'$ را تعیین علامت کنیم.

**مثال آموزشی**

**۱) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۶x^۲+۹x-۴$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟**

**پاسخ** چون f تابعی چند جمله‌ای است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین برای تعیین صعودی یا نزولی بودن آن، کافی است $f'$ را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۰\Rightarrow x_۱=۱,x_۲=\frac{c}{a}=۳\Rightarrow$$

| x | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | + | ۰ | − | ۰ | + |

پس f در بازه‌های $(-\infty,۱]$ و $[۳,+\infty)$ صعودی اکید و در بازهٔ $[۱,۳]$ نزولی اکید است.

**۲) جهت تغییرات تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۴-۲x^۲+۵$ را تعیین کنید.**

**پاسخ** با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، کافی است $f'$ را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۴x=۰\Rightarrow ۴x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=۰,\pm۱\Rightarrow$$

| x | | −۱ | | ۰ | | ۱ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | − | ۰ | + | ۰ | − | ۰ | + |

چون $f'$ در بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۰,۱)$ منفی است، پس f بر بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۰,۱]$ نزولی اکید است و چون $f'$ در بازه‌های $(-۱,۰)$ و $(۱,+\infty)$ مثبت است، پس f بر بازه‌های $[-۱,۰]$ و $[۱,+\infty)$ صعودی اکید است.

**۳۶** تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin^۲x+\sin x$ در کدام‌یک از فواصل زیر صعودی است؟

گزینهٔ «۱»

۱) $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}]$  ۲) $[-\frac{\pi}{۲},۰]$  ۳) $[۰,\pi]$  ۴) $[\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}]$

**پاسخ:** چون f در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین کافی است $f'$ را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+\cos x=\cos x(۲\sin x+۱)$$

با توجه به گزینه‌ها در بازهٔ $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}]$ عبارت‌های $\cos x$ و $۲\sin x+۱$ مثبت هستند، در نتیجه $f'>۰$ می‌باشد و بنابراین f صعودی است.

۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^۳-x-۶} & ; \quad x\neq ۲\\ a & ; \quad x=۲\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازهٔ $[۲,۳)$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$ با $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax+|x-۲|}{۲x+\sqrt{x^۲+۵}}$ برابر است، مقدار a کدام است؟

۱) $-۱۱۲$ ۲) $-۱۱۱$ ۳) $-۱۱۳$ ۴) $۱۱۳$

۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۵- مشتق تابع $f(x)=\sin^۴ x+\cos^۴ x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $-۱$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $۱$

۱۶- اگر $f(x)=\sqrt{x}\,g(x)$، $g(۹)=۱۲$ و $g'(۹)=۲$ باشد، $f'(۹)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

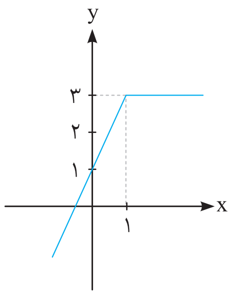
۱۷- اگر $A(۱,-۲)$ نقطهٔ عطف منحنی $y=ax^۳+bx^۲-۳x-۱$ باشد، طول نقطهٔ مینیمم نسبی آن کدام است؟

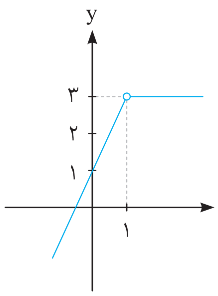
۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-۱$ ۴) فاقد مینیمم نسبی

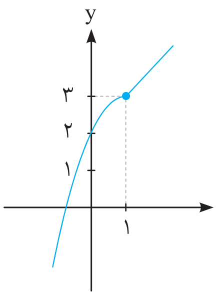
۱۸- به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y=۵x+a$ بر منحنی تابع $y=۲x^۲-۳x+۶$ مماس است؟ (ریاضی داخل ۹۷)

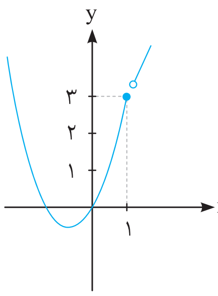
۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹- با فرض $f(x)=\begin{cases}x^۲+x & x\leq ۱\\ ۳x & x>۱\end{cases}$ نمودار $f'$ در همسایگی $x=۱$ چگونه است؟

۱)



۲)



۳)



۴)



## آزمون جامع (۲)

۱- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲+۴x+۵}=x^۲+۴x+۳$ کدام است؟

۱) $-۲$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲- حاصل عبارت $\dfrac{\left(\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}\right)\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}}{(۴-\sqrt{۱۵})^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\,(۴+\sqrt{۱۵})^{\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}}$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $-۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $-۳\sqrt{۶}$

۳- اگر $۳\sqrt{۳}=۹^{۲k}$ باشد، حاصل $\log_{۸k}(۶۴k^۲+۱۶k+۱۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۴- در یک دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت $a_۲a_۸=۹$ و $a_۴a_{۱۲}=۳۶$ می‌باشد. حاصل $\dfrac{(a_۸)^۳}{(a_۵)^۲+۲۷}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱۶}{۲۹}$ ۲) $\frac{۲۱۶}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۱۶}{۳۰}$ ۴) ۶

## پاسخنامهٔ آزمون جامع (۲)

**۱** (گزینهٔ ۲)

$$x^2+4x+5=t \Rightarrow \sqrt{t}=t-2 \xrightarrow[t-2\ge0\Rightarrow t\ge2]{t\ge0} (\sqrt{t})^2=(t-2)^2 \Rightarrow t=t^2-4t+4 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow (t-1)(t-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \ \text{غ‌ق‌ق} \\ t=4 \Rightarrow x^2+4x+5=4 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}=1 \end{cases}$$

**۲** (گزینهٔ ۲)

$$(4-\sqrt{15})^{\sqrt3+\sqrt2}\times(4+\sqrt{15})^{\frac{1}{\sqrt3-\sqrt2}}=(4-\sqrt{15})^{\sqrt3+\sqrt2}(4+\sqrt{15})^{\sqrt3+\sqrt2}=\left((4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})\right)^{\sqrt3+\sqrt2}=(16-15)^{\sqrt3+\sqrt2}=1$$

$$A=\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{4+\sqrt{15}} \xrightarrow[A<0]{\text{به توان ۲}} A^2=4-\sqrt{15}+4+\sqrt{15}-2=6 \Rightarrow A=-\sqrt6$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt3}=\sqrt[3]{\sqrt{9\times3}}=\sqrt{\sqrt[3]{27}}=\sqrt3$$

$$\frac{\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)\left(\sqrt[3]{3\sqrt3}\right)}{(4-\sqrt{15})^{\sqrt3+\sqrt2}(4+\sqrt{15})^{\frac{1}{\sqrt3-\sqrt2}}}=\frac{-\sqrt6\times\sqrt3}{1}=-\sqrt{18}=-\sqrt{9\times2}=-3\sqrt2$$

**۳** (گزینهٔ ۱)

$$3\sqrt3=9^{2k} \Rightarrow 3^1\times3^{\frac12}=(3^2)^{2k} \Rightarrow 3^{\frac32}=3^{4k} \Rightarrow 4k=\frac32 \Rightarrow k=\frac38$$

$$k=\frac38 \Rightarrow \log_{8k}(64k^2+16k+12)=\log_{8\times\frac38}\left(64\times\frac{9}{64}+16\times\frac38+12\right)=\log_3 27=3$$

**۴** (گزینهٔ ۴)

روش اول:

**نکته** در دنبالهٔ هندسی اگر $m+n=p+q$، آن‌گاه $a_ma_n=a_pa_q$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a_2a_8=a_5a_5 \Rightarrow 9=(a_5)^2 \\ a_4a_{12}=a_8a_8 \Rightarrow 36=(a_8)^2 \Rightarrow a_8=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a_8)^3}{(a_5)^2+27}=\frac{6^3}{9+27}=\frac{6^3}{36}=\frac{6^3}{6^2}=6$$

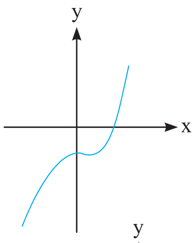
روش دوم:

$$\begin{cases} a_4a_{12}=36 \Rightarrow a_1q^3a_1q^{11}=36 \xrightarrow[\text{جملات مثبت}]{\text{جذر}} a_1q^7=6 \Rightarrow a_8=6 \\ a_2a_8=9 \Rightarrow a_1qa_1q^7=9 \xrightarrow[\text{جملات مثبت}]{\text{جذر}} a_1q^4=3 \Rightarrow a_5=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a_8)^3}{(a_5)^2+27}=\frac{(6)^3}{9+27}=6$$

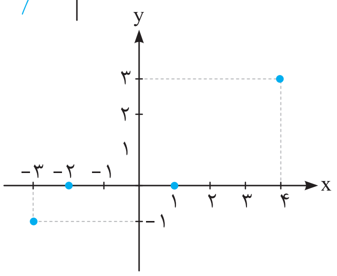
**۵** (گزینهٔ ۴)

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): تابع $f(x)=x^3-1$ که برای رسم کافیست نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت پایین ( y های منفی) انتقال دهیم. بنابراین تابع همواره صعودی است.



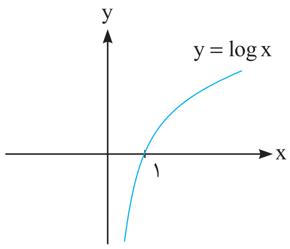

گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار f ملاحظه می‌کنیم وقتی از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر y کم نمی‌شود. پس تابع نزولی نیست. (صعودی است.)

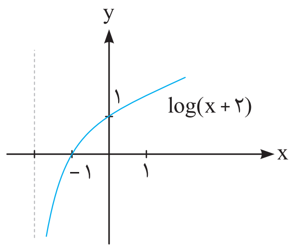



گزینهٔ (۳): ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=-\log\frac{1}{x+2}=-\log(x+2)^{-1}=\log(x+2)$$

برای رسم کافی است $y=\log x$ را دو واحد به سمت چپ ( x های منفی) انتقال دهیم:




ملاحظه می‌کنیم تابع صعودی است.