فهرست

فصل اول:

آشنایی با نظریهٔ اعداد

استدلال استنتاجی

درس اوّل: استدلال ریاضی

استدلال استنتاجی: اگر برای اثبات درستی یک گزاره از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع زیر است:

استدلال استنتاجی
- مثال نقض
- اثبات مستقیم
- روش اشباع
- برهان خلف
- بازگشتی

تذکر برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. موارد زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضی کمک مهمی به شما می‌کند:

۱) عدد زوج: $2k$ ۲) عدد فرد: $2k+1$ ۳) دو عدد زوج: $2k, 2k'$ ۴) دو عدد فرد: $2k+1, 2k'+1$

۵) عدد مضرب ۳: $3k$ ۶) دو عدد فرد متوالی: $2k-1, 2k+1$ ۷) دو عدد زوج متوالی: $2k, 2k+2$ ۸) عدد مربع کامل: k^2

۹) عدد فرد مربع کامل: $(2k+1)^2$ ۱۰) سه عدد متوالی: $k-1, k, k+1$ ۱۱) وارون عدد a: $\frac{1}{a}$ ۱۲) عدد گویا: $\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

۱ درستی کدام گزینه با استفاده از استدلال استنتاجی قابل استدلال **نیست**؟

گزینهٔ «۴»

۱) مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.
۲) مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است.
۳) مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.
۴) مجموع ۲ عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $(2k-1)+(2k+1)=4k$

گزینهٔ (۲): $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1=8q+1$

گزینهٔ (۳): $k+(k+1)+(k+2)=3k+3=3(k+1)=3k'$

گزینهٔ (۴): $(2k)+(2k+2)=4k+2\neq 4k'$

روش‌های اثبات

۱) **حکم کلی:** اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.

تذکر احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر **هر**، **همه**، **تمام** یا **هیچ** بیان می‌شوند.

۲) **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

تذکر با ارائهٔ مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد. بلکه فقط برای بیان نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۳) **روش اشباع:** گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همهٔ حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را روش اشباع می‌نامند.

۴) **برهان خلف:** یک روش اثبات غیرمستقیم برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم داده شده نادرست است، سپس نشان می‌دهیم که این فرضِ باطل، حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

۵) **بازگشتی:** گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرض درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند وگرنه درستی اثبات، تأیید نمی‌شود.

۲ درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض **نمی‌توان** رد کرد؟

گزینهٔ «۴»

۱) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.
۲) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۳) برای هر دو عدد طبیعی x و y همواره $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
۴) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر $n=4$ باشد، $2^4-1=15$ می‌باشد که عددی مرکب است.

گزینهٔ (۲): می‌دانیم $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هر دو گنگ هستند، اما مجموع آن‌ها برابر صفر است که یک عدد گویا است.

گزینهٔ (۳): اگر $x=1$ و $y=1$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{1}+\sqrt{1}\neq\sqrt{2}$.

گزینهٔ (۴): این گزاره درست است و با مثال نقض رد نمی‌شود:

$k=n(n+1) \Rightarrow 4k+1=4(n)(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

۳ کدام گزاره برای تمام اعداد طبیعی درست است؟

گزینهٔ «۲»

۱) عبارت $n^۲+۳n$ همواره مضرب ۴ است.

۲) عبارت $n^۲+۳n+۵$ همواره فرد است.

۳) عبارت $n^۳+n^۲$ همواره مضرب ۳ است.

۴) عبارت $n^۲+۳n$ به ازای هیچ مقداری از n مربع کامل نیست.

پاسخ:

گزینهٔ (۱): $n=۳ \Rightarrow n^۲+۳n=۹+۹=۱۸\neq ۴k$

گزینهٔ (۲): فرد $= n^۲+۳n+۵=\underbrace{n(n+۳)}_{\text{۳واحد اختلاف دارند بنابراین همواره یکی زوج و یکی فرد است}}+۵=۲k+۵=$ فرد

گزینهٔ (۳): $n=۱ \Rightarrow n^۳+n^۲=۲\neq ۳k$

گزینهٔ (۴): $n=۱ \Rightarrow n^۲+۳n=۴=$ مربع کامل

۴ درستی کدام گزاره را نمی‌توان به کمک برهان خلف، اثبات کرد؟

گزینهٔ «۳»

۱) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

۲) $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۳) اگر دو عدد a و b گنگ باشند $\sqrt{ab}$ نیز گنگ است.

۴) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

پاسخ: اگر $a=\sqrt{۲}-۱$ و $b=\sqrt{۲}+۱$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{ab}$ برابر است با:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\sqrt{۱}=۱\in Q$$

بنابراین گزارهٔ گزینهٔ (۳) با مثال نقض رد شده و با برهان خلف قابل اثبات نیست.

۵ در اثبات نامساوی $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz$ به کمک اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی زیر خواهیم رسید؟

گزینهٔ «۴»

۱) $(x-xz+y)^۲\geq ۰$

۲) $(x-yz)^۲+(yz-z)^۲\geq ۰$

۳) $(x+yz+z)^۲\geq ۰$

۴) $(x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$

پاسخ: طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲xz+۲yz \Rightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲xz+z^۲+y^۲-۲yz+z^۲\geq ۰ \Rightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$$

بخش‌پذیری

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq ۰$ بخش‌پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که:

$$a=bq$$

در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم b عاد می‌کند (می‌شمارد) a را. به‌عنوان مثال:

$$۶=۲\times ۳ \Rightarrow ۲|۶, ۳|۶$$

برای رابطهٔ $b|a$ چند تعبیر مختلف می‌توان به کار برد:

۱) b شمارنده یا مقسوم‌علیه (عامل) a است.

۲) a مضرب b است.

۳) a بر b بخش‌پذیر است.

۶ کدام گزینه صحیح نیست؟

گزینهٔ «۲»

۱) $۷|۳۵$ ۲) $۲۴|۶$ ۳) $۴|۱۲$ ۴) $۸|۲۴$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $۳۵=۷\times ۵ \Rightarrow ۷|۳۵$

گزینهٔ (۲): $۲۴=۴\times ۶ \Rightarrow ۶|۲۴ \Rightarrow ۲۴\nmid ۶$

گزینهٔ (۳): $۱۲=۴\times ۳ \Rightarrow ۴|۱۲$

گزینهٔ (۴): $۲۴=۳\times ۸ \Rightarrow ۸|۲۴$

خواص بخش‌پذیری

۱ در بخش‌پذیری علامت اعداد هیچ نقشی ندارد.

$-10=(+2)(-5) \Rightarrow -5|-10$

$-10=(-2)(+5) \Rightarrow -2|-10$

۲ اگر یک عدد بر عدد دیگر بخش‌پذیر باشد، قرینهٔ آن نیز بر دیگری بخش‌پذیر است و به طور کلی داریم:

۱) $a|b \Rightarrow a|-b$ ۲) $a|b \Rightarrow -a|b$ ۳) $a|b \Rightarrow -a|-b$

۳ اگر a یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه همواره داریم:

۱) $a|a$ ۲) $\pm1|a$ ۳) $a|\pm1 \Rightarrow a=\pm1$ (±1 بر هیچ عددی بخش‌پذیر نیستند مگر خودشان.)

۴) $0|0$ ۵) $a|0$ ۶) $0|a \Rightarrow a=0$ (صفر هیچ عددی را نمی‌شمارد مگر خودش)

۷ کدام یک از موارد زیر **نادرست** است؟ گزینهٔ «۴»

۱) $6|-48$ ۲) $-8|24$ ۳) $-7|-91$ ۴) $-12|18$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $-48=6\times(-8) \Rightarrow 6|-48$

گزینهٔ (۲): $24=3\times(-8) \Rightarrow -8|24$

گزینهٔ (۳): $-91=13\times(-7) \Rightarrow -7|-91$

گزینهٔ (۴): $18=-12\times ? \Rightarrow -12\nmid 18$

۸ کدام گزینه صحیح **نیست**؟ گزینهٔ «۴»

۱) صفر بر تمام اعداد صحیح بخش‌پذیر است.
۲) اعداد ±1 تمام اعداد صحیح را عاد می‌کنند.
۳) صفر بر صفر بخش‌پذیر است.
۴) تمام اعداد ۱ را عاد می‌کنند.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): صفر بر تمام اعداد صحیح بخش‌پذیر است، چون: $0=a\times0 \Rightarrow a|0$

گزینهٔ (۲): اعداد ±1 تمام اعداد صحیح را عاد می‌کنند، چون:

$$\begin{cases} a=1\times a \Rightarrow 1|a \\ a=(-1)(-a) \Rightarrow -1|a \end{cases}$$

گزینهٔ (۳): صفر بر صفر بخش‌پذیر است، چون: $0=a\times0 \Rightarrow 0|0$

گزینهٔ (۴): تنها اعدادی که ۱ را عاد می‌کنند، ±1 هستند.

خواص بخش‌پذیری

اگر $a|b$ و $b\neq0$ باشد، آن‌گاه همواره $|a|\leq|b|$ است.

اگر a و b اعداد طبیعی و $a|b$ باشد، آن‌گاه $a\leq b$ است.

اگر $a|b$ و $|a|>|b|$ باشد، آن‌گاه $b=0$ است.

اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $|a|=|b|$ است.

۹ کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟ گزینهٔ «۲»

۱) $a|b \Rightarrow |a|\leq|b|$ ۲) $a|b, b|a \Rightarrow |a|=|b|$ ۳) $|a|\leq|b| \Rightarrow a|b$ ۴) $a|b \Rightarrow b|a$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر $b=0$ باشد، این نتیجه‌گیری نادرست است.

گزینهٔ (۲):

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow |a|\leq|b| \\ b|a \Rightarrow |b|\leq|a| \end{cases} \Rightarrow |a|=|b|$$

گزینهٔ (۳): به‌عنوان مثال نقض، اگر $a=3$ و $b=5$ باشد، نتیجه‌گیری نادرست است.

گزینهٔ (۴): به‌عنوان مثال نقض، اگر $a=2$ و $b=4$ باشد، نتیجه‌گیری نادرست است.

فصل دوم:

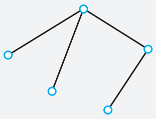
گراف و مدل‌سازی

درس اوّل: معرفی گراف

تعریف: گراف در واقع مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها است به‌طوری که این نقطه‌ها توسط پاره‌خط‌ها به هم وصل شده‌اند.

نقاط را رأس‌های گراف و خطوط را یال‌های گراف می‌نامند.

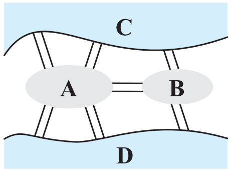
به‌عنوان مثال، گراف مقابل دارای ۵ رأس و ۴ یال است:

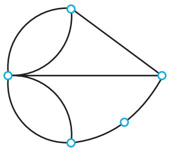


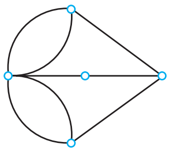
تذکر اگر ساده شدهٔ یک نقشه را با استفاده از نقاط و خطوط رسم کنیم، از مدل‌سازی مسئله توسط گراف استفاده کرده‌ایم.

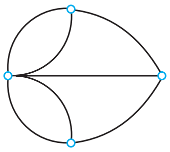
۱ کدام یک از گراف‌های زیر، مدل‌سازی مناسبی برای نقشهٔ مقابل است؟

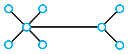
گزینهٔ «۳»



۱) 

۲) 

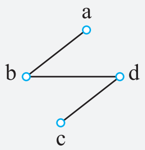
۳) 

۴) 

پاسخ: چون در نقشهٔ داده شده چهار ناحیهٔ A ، B ، C و D دیده می‌شود، بنابراین گراف دارای ۴ رأس است و چون ۷ پل وجود دارد، گراف دارای ۷ یال خواهد بود و برای رسم گراف کافی است ناحیه‌ها را با نقطه نمایش دهیم و به جای هر پل، یال متناظر با آن را بین نقاط (ناحیه‌ها) رسم کنیم.

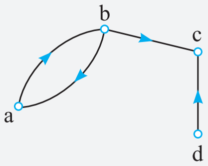
مجموعهٔ رأس‌ها و یال‌های گراف

اگر G یک گراف باشد، مجموعهٔ رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و تعداد رأس‌ها را با $|V(G)|$ یا $n(V(G))$ مشخص می‌کنند. همچنین مجموعهٔ یال‌های گراف را با $E(G)$ و تعداد یال‌ها را با $|E(G)|$ یا $n(E(G))$ نشان می‌دهند.



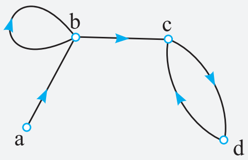
$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \Rightarrow |V(G)|=۴ \\ E(G)=\{ab,bd,cd\} \Rightarrow |E(G)|=۳ \end{cases}$$

۱) اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشند، باید یال‌ها را به صورت زوج مرتب نشان دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(d,c)\} \end{cases}$$

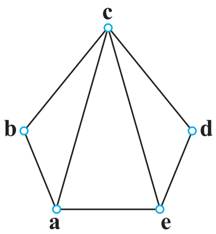
۲) در بعضی از گراف‌ها، یالی وجود دارد که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. این یال را طوقه می‌نامند.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(a,b),\underbrace{(b,b)}_{\text{طوقه}},(b,c),(c,d),(d,c)\} \end{cases}$$

۲ اگر نمودار گراف G به صورت مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟

گزینهٔ «۱»



۱) $|E(G)|=۷ \ , \ |V(G)|=۵$

۲) $|E(G)|=۸ \ , \ |V(G)|=۵$

۳) $|E(G)|=۵ \ , \ |V(G)|=۷$

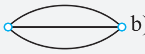
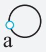
۴) $|E(G)|=۱۲ \ , \ |V(G)|=۶$

پاسخ: گراف دارای ۵ رأس است، بنابراین $n(V(G))=۵$ و همچنین گراف دارای ۷ یال است، بنابراین $n(E(G))=۷$ ، به عبارت دیگر:

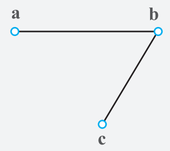
$V(G)=\{a,b,c,d,e\} \Rightarrow |V(G)|=۵$

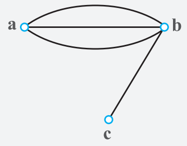
$E(G)=\{ab,bc,cd,de,ea,ca,ce\} \Rightarrow |E(G)|=۷$

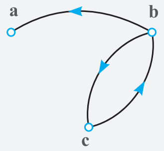
گراف ساده

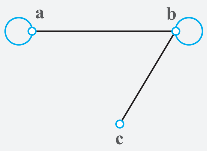
تعریف: به گرافی که در شکل آن، یال جهت‌دار (b  a)، یال موازی (b  a) و طوقه () وجود نداشته باشد، گراف ساده می‌گویند.

تذکر گراف‌ها به چهار دستهٔ کلی گراف جهت‌دار، گراف طوقه‌دار، گراف چندگانه و گراف ساده تقسیم‌بندی می‌شوند:

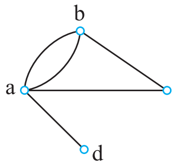
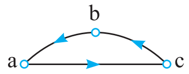
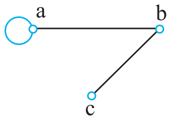
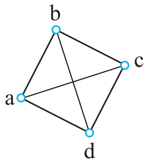

گراف ساده


گراف چندگانه


گراف جهت‌دار


گراف طوقه‌دار

۳ کدام یک از گراف‌های زیر، یک گراف ساده است؟ گزینهٔ «۴»

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد؛ بنابراین گراف ساده نیست.

گزینهٔ (۲): یال‌های گراف جهت‌دار هستند؛ بنابراین گراف ساده نیست.

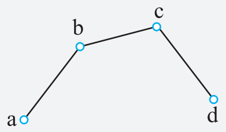
گزینهٔ (۳): رأس a دارای طوقه است؛ بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.

گزینهٔ (۴): گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز حداکثر یک یال وجود دارد و گراف، طوقه و یال جهت‌دار ندارد.

مرتبه و اندازه گراف

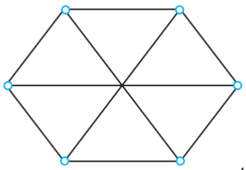
مرتبه: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ گراف G می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم.

اندازه: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \Rightarrow p(G)=|V(G)|=۴ \\ E(G)=\{ab,bc,cd\} \Rightarrow q(G)=|E(G)|=۳ \end{cases}$$

۴ در گراف شکل مقابل اگر مرتبه را با $p(G)$ و اندازه را با $q(G)$ نشان دهیم، حاصل $q(G)-p(G)$ کدام است؟ گزینهٔ «۲»



۱) -۳ ۲) ۳
۳) -۶ ۴) ۶

پاسخ: در این گراف ۶ رأس وجود دارد؛ بنابراین $p(G)=۶$ و همچنین تعداد یال‌ها برابر ۹ است؛ در نتیجه $q(G)=۹$، پس داریم:

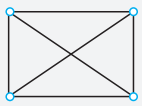
$$q(G)-p(G)=۹-۶=۳$$

رابطهٔ p و q

اگر مرتبهٔ یک گراف ساده p و اندازهٔ آن q باشد، آنگاه رابطهٔ روبه‌رو بین p و q برقرار است.

$$\boxed{۰ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲}}$$

به‌عنوان مثال، یک گراف با ۴ رأس، حداکثر $\frac{۴\times۳}{۲}=۶$ یال را می‌تواند در خود جای دهد:



۵ یک گراف ساده دارای ۲۰ یال است. حداقل مرتبهٔ گراف کدام است؟

گزینهٔ «۳»

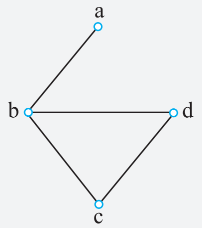
۱) ۵ ‏ ۲) ۶ ‏ ۳) ۷ ‏ ۴) ۸

پاسخ: فرض می‌کنیم مرتبهٔ گراف p و اندازهٔ گراف q باشد. در این صورت q = ۲۰ است و ما به دنبال حداقل p هستیم:

$$۰ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۲۰ \le \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p(p-۱) \ge ۴۰ \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} Min(p) = ۷$$

درجه رأس و انواع رأس

درجهٔ رأس: به تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند، درجهٔ رأس v گفته می‌شود و آن را با نماد deg(v) یا d(v) نشان می‌دهند.



$$\Rightarrow \begin{matrix} deg(a) = ۱, & deg(c) = ۲ \\ deg(b) = ۳, & deg(d) = ۲ \end{matrix}$$

رأس تنها (ایزوله): به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها یا ایزوله گویند.

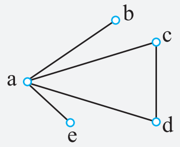
رأس full: به رأسی که درجهٔ آن یک واحد کم‌تر از مرتبهٔ گراف باشد، رأس full می‌گویند.

محدودهٔ درجهٔ رأس: اگر G یک گراف ساده از مرتبهٔ p با مجموعهٔ رأس‌های $V = \{v_۱, v_۲, ..., v_p\}$ باشد، آنگاه:

$$\underbrace{۰}_{\text{رأس ایزوله (تنها)}} \le \underbrace{deg(v_i)}_{\text{درجهٔ هر رأس}} \le \underbrace{p-۱}_{\text{رأس Full}}$$

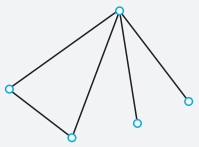
رأس زوج و فرد: اگر درجهٔ یک رأس گراف، عددی فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر درجهٔ یک رأس از گراف، عددی زوج باشد، آن را رأس زوج می‌نامند.

به‌عنوان مثال، در گراف مقابل، رأس **a** فول (full)، رأس‌های **b** و **e** رأس‌های فرد و رأس‌های **c** و **d** رأس‌های زوج هستند.



ماکزیمم درجهٔ گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجهٔ رأس‌های گراف G را ماکزیمم درجهٔ گراف G می‌نامیم و با Δ(G) نشان می‌دهیم.

مینیمم درجهٔ گراف: کوچک‌ترین عدد در بین درجهٔ رأس‌های گراف G را مینیمم درجهٔ گراف G می‌نامیم و با δ(G) نشان می‌دهیم.



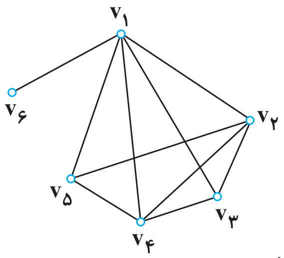
$$\Rightarrow \Delta(G) = ۴ \quad , \quad \delta(G) = ۱$$

نتیجه: اگر G یک گراف ساده از مرتبهٔ p باشد، آنگاه همواره:

$$۰ \le \delta \le deg(v_i) \le \Delta \le p-۱$$

۶ نمودار گراف G به صورت مقابل است. اختلاف تعداد رأس‌های زوج و رأس‌های فرد گراف کدام است؟

گزینهٔ «۲»



۱) ۱

۲) ۲

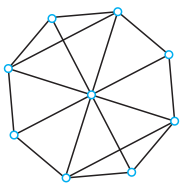
۳) ۴

۴) صفر

پاسخ: درجهٔ رأس‌های گراف به صورت $d(v_۱) = ۵, d(v_۲) = ۴, d(v_۳) = ۳, d(v_۴) = ۴, d(v_۵) = ۳$ و $d(v_۶) = ۱$ است. بنابراین رأس‌های $v_۱$، $v_۳$، $v_۵$ و $v_۶$ رأس‌های فرد و رأس‌های $v_۲$ و $v_۴$ رأس‌های زوج هستند. در نتیجه اختلاف تعداد رأس‌های زوج و رأس‌های فرد برابر است با: ۲ = ۲ − ۴

۷ در گراف G مطابق شکل، حاصل Δ(G) − δ(G) کدام است؟

گزینهٔ «۴»



۱) ۴ ‏ ۲) ۳

۳) ۶ ‏ ۴) ۵

پاسخ: در گراف داده شده، درجهٔ رأس‌ها ۳ یا ۴ یا ۸ است، بنابراین:

$$\Delta(G) = ۸, \delta(G) = ۳ \Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = ۸ - ۳ = ۵$$

همسایگی باز و بسته

دو رأس همسایه (مجاور): دو رأس u و v از گراف G را دو رأس همسایه یا مجاور می‌گوییم، هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی: $uv \in E(G)$

همسایگی باز رأس v : اگر v یکی از رأس‌های گراف G باشد، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، همسایگی باز رأس v می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

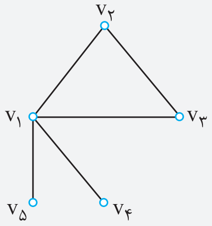
$$N_G(v) = \{u \in v(G) : uv \in E(G)\}$$

همسایگی بستهٔ رأس v : با اضافه کردن خودِ رأس v به $N_G(v)$ ، همسایگی بستهٔ رأس v به دست می‌آید که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم.

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

دو یال مجاور: دو یال را مجاور می‌گوییم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن متصل باشند.

به‌عنوان مثال، در گراف شکل مقابل:



رأس $v_۱$ با تمام رأس‌ها مجاور است.

همسایگی باز رأس $v_۲$ برابر است با $N_G(v_۲) = \{v_۱, v_۳\}$

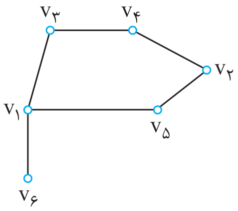
همسایگی بستهٔ رأس $v_۲$ برابر است با $N_G[v_۲] = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$

یال‌های $v_۱v_۲$ و $v_۲v_۳$ مجاورند، اما یال‌های $v_۱v_۵$ و $v_۲v_۳$ مجاور نیستند.

۸ (گزینهٔ «۲») **اگر در گراف G $v(G) = \{v_۱, v_۲, ..., v_۶\}$ و $E(G) = \{v_۱v_۳, v_۲v_۵, v_۱v_۵, v_۲v_۴, v_۳v_۴, v_۱v_۶\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $N_G[v_۱]$ چند عضو دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

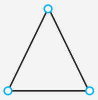
پاسخ: بهتر است گراف G را رسم کنیم. برای این منظور ۶ نقطه به عنوان رأس‌های گراف G در نظر می‌گیریم. سپس عضوهای مجموعهٔ E را رسم می‌کنیم؛ توجه داشته باشید که هنگام رسم گراف، هیچ یالی نباید خودش را قطع کند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن نیست، عبور نماید.



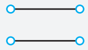
$\Rightarrow N_G[v_۱] = \{v_۱, v_۳, v_۵, v_۶\} \Rightarrow$ ۴ عضو

گراف منتظم

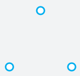
تعریف: گراف ساده‌ای را که درجهٔ تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد k باشد، گراف k- منتظم می‌نامیم.



۲- منتظم مرتبهٔ ۳



۱- منتظم مرتبهٔ ۴



۰- منتظم مرتبهٔ ۳

نتیجه: در گراف k- منتظم، رابطهٔ $\Delta = \delta = k$ برقرار است.

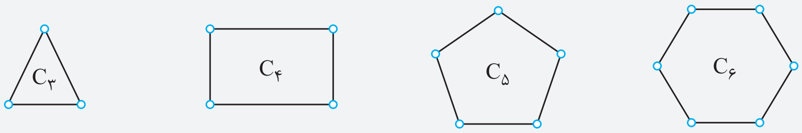
تذکر گراف ۰ - منتظم را **گراف تهی** می‌نامیم. یعنی در گراف تهی، تمام رئوس ایزوله بوده و هیچ یالی وجود ندارد.

قضیهٔ گراف منتظم: اگر G یک گراف k- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد، آنگاه:

$$p.k = ۲q$$

تذکر در گراف k- منتظم از مرتبهٔ p ، چون k درجهٔ رأس و p مرتبهٔ گراف است، واضح است باید شرط $۰ \le k \le p-۱$ همواره برقرار باشد.

گراف C_n : گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ n را با شرط $n \ge ۳$ ، به صورت C_n نمایش می‌دهند. نمودار این گراف حلقوی است.



فصل سوم:

ترکیبیّات

(شمارش)

درس اوّل: مباحثی در ترکیبیّات

قرار دادن اشیاء متمایز در جایگاه‌های متفاوت

اگر بخواهیم n نفر را در k جایگاه متمایز قرار دهیم به طوری‌که تعداد افراد قرار گرفته در جایگاه‌ها مشخص باشد، با استفاده از انتخاب ترکیب ابتدا تعداد افراد یکی از جایگاه‌ها را از میان کل افراد موجود انتخاب می‌کنیم، سپس تعداد افراد جایگاه بعدی را از میان باقی‌ماندهٔ افراد انتخاب می‌کنیم و همین منوال را ادامه می‌دهیم.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در اتاق‌های ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره جای داد؟

پاسخ

۲نفر کم شد — ۳نفر کم شد

$$\binom{8}{2}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}=\frac{8!}{2!\times 6!}\times\frac{6!}{3!3!}\times\frac{3!}{0!3!}=\frac{8!}{2!3!3!}=560$$

نکته هریک از اتاق‌های یک هتل (یا هر ساختمان دیگری در جهان!) در یک مختصات جغرافیایی منحصربه‌فرد قرار گرفته و به یقین، متفاوت از دیگری محسوب می‌شود.

۱ به چند طریق می‌توان ۶ مهرهٔ متمایز را در ۳ ظرف متمایز قرار داد، به‌طوری‌که در هر ظرف، ۲ مهره قرار گیرد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

۲مهره کم شد — ۲مهره کم شده

$$\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}=\frac{6!}{\cancel{4!}2!}\times\frac{\cancel{4!}}{2!2!}\times\frac{2!}{0!2!}=\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

۲ به چند طریق می‌توان ۸ جایزهٔ متمایز را بین ۴ دانش‌آموز توزیع کرد، به‌طوری که به هر کدام دقیقاً دو جایزه برسد؟

۱) ۲۶۸۰ ۲) ۲۵۲۰ ۳) ۲۱۱۴ ۴) ۱۰۲۴

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

۲جایزه کم شده — ۲جایزه کم شده — ۲جایزه کم شده

$$\binom{8}{2}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}=\frac{8!}{2!\cancel{6!}}\times\frac{\cancel{6!}}{2!\cancel{4!}}\times\frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}}\times\frac{\cancel{2!}}{0!\cancel{2!}}=2520$$

تیم‌بندی

وقتی صحبت از تیم‌های بدون نام می‌شود، صرفاً مسئلهٔ تقسیم‌بندی مطرح است؛ بدون آن‌که این افراد را بخواهیم در جایگاه مشخصی [همانند اتاق‌های یک هتل] قرار دهیم. بنابراین اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم باشد، باید پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت تعداد تیم‌های با اعضای یکسان تقسیم کرد.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به سه تیم ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره تقسیم کرد؟

پاسخ ابتدا ۲ نفر از ۸ نفر را برای یک تیم انتخاب می‌کنیم، پس ۳ نفر بعدی را از ۶ نفر باقی‌مانده انتخاب کرده و ۳ نفر آخر را نیز برای تیم آخر انتخاب می‌کنیم. حال چون ۲ تیم ۳ نفره داریم، باید جواب را بر !۲ تقسیم کنیم:

$$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}=\frac{28\times20\times1}{2}=280$$

تذکر افراز کردن یک مجموعه، در واقع قرار دادن اشیای متمایز در جایگاه‌های یکسان است.

۳ به چند طریق می‌توان ۶ نفر از کارمندان یک اداره را به ۳ گروه دو نفره تقسیم کرد؟

۱) ۱۵ ۲) ۷۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۱۵

گزینهٔ «۱»

پاسخ: چون صرفاً مسئلهٔ تقسیم‌بندی مطرح است، داریم:

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=\frac{15\times6\times1}{6}=15$$

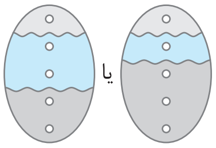
۴ به چند طریق می‌توان یک مجموعهٔ پنج عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

گزینهٔ «۳»

پاسخ:

$$\Rightarrow \text{تعداد افرازها} = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!} + \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!} = ۱۵ + ۱۰ = ۲۵$$



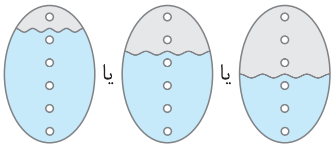
۵ به چند طریق می‌توان یک مجموعهٔ ۶ عضوی را به ۲ زیر مجموعه افراز کرد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۵ ۴) ۳۱

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$\Rightarrow \text{تعداد افرازها} = \binom{۶}{۱}\binom{۵}{۵} + \binom{۶}{۲}\binom{۴}{۴} + \frac{\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}{۲!} = ۶ + ۱۵ + ۱۰ = ۳۱$$



توزیع اشیاء مشابه در ظرف‌های متمایز

برای پیدا کردن تعداد راه‌های توزیع n شیء کاملاً مشابه در k ظرف متمایز [یا ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت] باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

توجه منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۴ مهرهٔ مشابه را در ۳ ظرف خالی قرار داد؟

پاسخ فرض می‌کنیم x_1 مهره در ظرف اول، x_2 مهره در ظرف دوم و x_3 مهره در ظرف سوم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۴ باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۴ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

تذکر در سؤالات قرار دادن اشیا در جایگاه‌های متفاوت، اگر اشیا مشابه باشند، برای حل سؤال از معادلات استفاده می‌کنیم. توجه کنید که میوه‌ها [سیب، پرتقال و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم؛ اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

۶ به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۴ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

گزینهٔ «۱»

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 پرتقال در سبد اول، x_2 پرتقال در سبد دوم و x_3 پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال چون جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۵+۲}{۲} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$$

۷ به چند طریق می‌توان ۸ مهرهٔ کاملاً مشابه را در ۴ ظرف متمایز قرار داد؟

۱) ۵۶ ۲) ۷۲ ۳) ۹۴ ۴) ۱۶۵

گزینهٔ «۴»

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 مهره در ظرف اول، x_2 مهره در ظرف دوم، x_3 مهره در ظرف سوم و x_4 مهره در ظرف چهارم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۸ باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۸ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۸+۳}{۳} = \binom{۱۱}{۳} = ۱۶۵$$

۸ به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل متمایز، یک دسته‌گل شامل ۷ شاخه درست کرد؟ (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است.)

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

گزینهٔ «۳»

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 شاخه از گل نوع اول، x_2 شاخه از گل نوع دوم و x_3 شاخه از گل نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۷+۲}{۲} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

آزمون‌های جامع

آزمون جامع (۱)

۱ اگر $a | b$ و $a | c$، کدام رابطه درست **نیست**؟

۱) $a | b+c$ ۲) $a | b^2 + c$ ۳) $a^2 | b+c$ ۴) $a^2 | bc$

۲ اگر عدد فرد $\overline{a52b}$ مضرب ۵۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{aabb}$ بر ۹ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۸

۳ تعداد اعداد سه‌رقمی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۵، ۶ و ۷ به ترتیب ۲، ۳ و ۵ باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴ معادلهٔ سیالهٔ $25x + 12y = 1110$ برروی مجموعهٔ اعداد طبیعی چند زوج جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

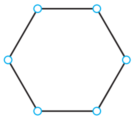
۵ در گراف G با رئوس a, b, c, d، $N_G(a) = \{b, d\}$، $N_G(b) = \{a, c, d\}$ و $N_G(c) = \{b, d\}$ است. این گراف چند دور دارد؟

۱) فاقد دور ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶ عدد احاطه‌گری کدام گراف از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) C_5 ۲) ۵- منتظم مرتبهٔ ۶ ۳) P_6 ۴) ۱- منتظم مرتبهٔ ۶

۷ در گراف زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارای a عضو و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر دارای b عضو است. مقدار $b - a$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به‌طوری که $x_1 > 5$ باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۹ در مربع لاتین مقابل، بیشترین مقدار $a \times b$ کدام است؟

۳	a	....
۱	....	b
۲	....	....

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰ در جعبه‌ای ۲ گوی سفید، ۴ گوی قرمز، ۷ گوی آبی و ۸ گوی سبز موجود است. حداقل چند گوی از این جعبه خارج کنیم تا مطمئن باشیم ۶ گوی هم‌رنگ خارج شده است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

آزمون جامع (۲)

۱ اگر $2a | b^2$ و $a | c^3$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $c | b$ ۲) $c^2 | b$ ۳) $a | b$ ۴) $2 | c$

۲ تعداد اعداد دو رقمی n که در معادلهٔ هم‌نهشتی $11^n + 18 \overset{17}{\equiv} 0$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

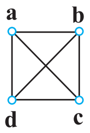
۳ به‌ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد طبیعی $5n + 3$ و $4n - 5$ نسبت به هم غیراول‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) هیچ

۴ اگر سوم شهریورماه سالی، دوشنبه باشد، بیست و ششم بهمن‌ماه آن سال چه‌روزی است؟

۱) جمعه ۲) یکشنبه ۳) سه‌شنبه ۴) چهارشنبه

۵ گراف G مطابق شکل مفروض است. این گراف چند زیرگراف ۱- منتظم و هم‌مرتبه با خودش دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامهٔ آزمون جامع (۱)

۱ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b+c$

گزینهٔ (۲): $a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid b^2 \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b^2 + c$

گزینهٔ (۳): $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \not\Rightarrow a^2 \mid b+c$

گزینهٔ (۴): $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \xRightarrow{\times} a^2 \mid bc$

---

۲ می‌دانیم ۵۵ = ۱۱×۵ است، پس عدد $\overline{a52b}$ هم مضرب ۵ بوده و هم مضرب ۱۱. حال چون این عدد مضرب ۵ است، پس b باید یا صفر باشد یا ۵. از آن‌جایی که عدد $\overline{a52b}$ فرد است، پس $b = 5$ می باشد و داریم:

$$\overline{a525} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5-2+5-a \overset{11}{\equiv} 0 \xRightarrow{0<a\leq 9} a = 8 \Rightarrow 8855 \overset{9}{\equiv} 8+8+5+5 \overset{9}{\equiv} 8$$

---

۳ عدد سه‌رقمی موردنظر را a می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a \overset{5}{\equiv} 2 \overset{5}{\equiv} -3 \\ a \overset{6}{\equiv} 3 \overset{6}{\equiv} -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \overset{30}{\equiv} -3 \overset{30}{\equiv} 117 \quad (4\times 30) \\ a \overset{7}{\equiv} 5 \overset{7}{\equiv} 117 \quad (16\times 7) \end{matrix} \Rightarrow a \overset{210}{\equiv} 117 \Rightarrow a = 210k+117 \xRightarrow{\text{a عدد سه‌رقمی}} k = 0,1,2,3,4 \Rightarrow \text{۵مقدار}$$

بنابراین ۵ عدد سه رقمی برای a وجود دارد.

---

۴ عدد ۱۱۱۰ نه بر ۱۲ بخش‌پذیر است و نه بر ۲۵ و حدس زدن جواب هم به سادگی مقدور نیست. بنابراین یکی از جواب‌های x را با کمک معادلهٔ هم‌نهشتی به‌دست می‌آوریم:

$$25x+12y \overset{12}{\equiv} 1110 \Rightarrow x \overset{12}{\equiv} \cancel{1200}^{\,0} - \cancel{90}^{\,6} \overset{12}{\equiv} 0-6 \xrightarrow{+1\times 12} \overset{12}{\equiv} 6 \Rightarrow x \overset{12}{\equiv} 6 \Rightarrow x_0 = 6$$

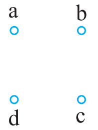
به جای x در معادله ۶ می‌گذاریم و y را پیدا می‌کنیم:

$$25(6)+12y = 1110 \Rightarrow 12y = 960 \Rightarrow y_0 = 80$$

$$\begin{cases} x = 6+12k > 0 \\ y = 80-25k > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{80}{25} = 3/2 \xRightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = 0,1,2,3 \Rightarrow \text{۴ جواب طبیعی}$$

---

۵ ابتدا گراف G را رسم می‌کنیم. برای این منظور ۴ نقطه به‌صورت مقابل به‌عنوان رأس‌های c،b،a و d در نظر می‌گیریم. حال:

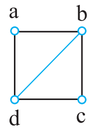


۱) چون $N_G(a) = \{b,d\}$ است، رأس a را به رأس‌های b و d وصل می‌کنیم.

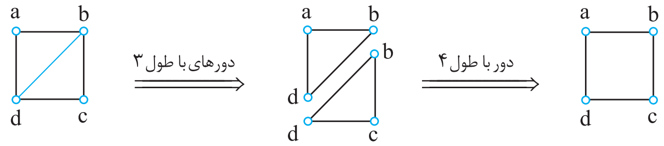
۲) چون $N_G(b) = \{a,c,d\}$ است، رأس b را به رأس‌های c،a و d وصل می‌کنیم.

۳) چون $N_G(c) = \{b,d\}$ است، رأس c را به رأس‌های b و d وصل می‌کنیم.

بنابراین شکل گراف G به‌صورت مقابل است:



این گراف می‌تواند دورهایی با طول ۳ و ۴ داشته باشد که به‌صورت زیر هستند:



بنابراین گراف G مجموعاً دارای ۳ دور است.

---

۶ عدد احاطه‌گری هریک از گراف‌های داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عدد احاطه گری گراف C_5 برابر ۲ = $\lceil 1/66 \rceil = \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil$ است.

گزینهٔ (۲): گراف ۵- منتظم مرتبهٔ ۶ همان گراف K_6 است که عدد احاطه‌گری آن برابر ۱ است.

گزینهٔ (۳): عدد احاطه‌گری گراف P_6 برابر ۲ = $\left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil$ است.

گزینهٔ (۴): عدد احاطه‌گری گراف ۱- منتظم مرتبهٔ ۶ برابر $3 = \frac{6}{2}$ است: